

Sul contenuto osservabile della cinematica e della meccanica quantistica*

di **W. Heisenberg** in Copenhagen

Con 2 illustrazioni. (Ricevuto il 23 marzo 1927.)

Sommario

Nel presente lavoro vengono, per prima cosa, enunciate definizioni esatte delle parole: posizione, velocità, energia, etc. (per esempio dell'elettrone), che sono valide anche nella meccanica quantistica, e viene mostrato che quantità canonicamente coniugate possono venire determinate simultaneamente solo con una inesattezza intrinseca (§ 1). Questa inesattezza è il vero motivo per cui relazioni statistiche appaiono nella meccanica quantistica. Si riesce a dare una formulazione matematica di questa inesattezza per mezzo della teoria di Dirac-Jordan (§ 2). A partire dai principi così ottenuti viene mostrato come i processi macroscopici possano essere capiti usando la meccanica quantistica (§ 3). Per la spiegazione della teoria vengono discussi alcuni particolari esperimenti mentali (§ 4).

Noi crediamo di capire in modo chiaro una teoria fisica quando possiamo figurarci qualitativamente, in tutti i casi semplici, le conseguenze sperimentali di questa teoria, e quando, allo stesso tempo, abbiamo riconosciuto che l'utilizzo della teoria non contiene mai contraddizioni interne. Per esempio, noi crediamo di capire bene l'idea di Einstein di uno spazio tridimensionale chiuso perché per noi sono pensabili senza contraddizioni le conseguenze sperimentali di questa idea. Certo, queste conseguenze sono in contraddizione con i nostri consueti e osservabili concetti di spazio-tempo. Possiamo, tuttavia, convincerci del fatto che la possibilità dell'utilizzo di questa abituale nozione di spazio-tempo su spazi molto grandi non può essere dedotta né dalle nostre leggi logiche né dall'esperienza. L'interpretazione osservativa della meccanica quantistica è finora ancora piena di contraddizioni interne che si ripercuotono nella lotta delle opinioni sulla teoria del discontinuo e del continuo, corpuscoli e onde. Già da qui si potrebbe concludere che un'interpretazione della meccanica quantistica non sia possibile per mezzo dei concetti usuali della cinematica e della meccanica. La meccanica quantistica era per l'appunto sorta nel tentativo di rompere con quelle solite nozioni di cinematica e di collocare al loro posto relazioni tra numeri concreti, dati sperimentali. Siccome ciò sembra avere avuto successo, lo schema matematico della meccanica

*Titolo originale: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*. Pubblicato in: *Zeitschrift für Physik* **43** (1927): 172–198. Tradotto da Oliver F. Piattella e da Giuseppina Fiorino.

quantistica non necessiterà di alcuna revisione. Tanto meno necessaria sarà una revisione della geometria spazio-temporale per piccoli spazi e tempi, dato che noi possiamo approssimare a piacimento le leggi della meccanica quantistica a quelle classiche attraverso la scelta di masse sufficientemente pesanti, anche quando si tratti di spazi e tempi così piccoli. Tuttavia, che una revisione dei concetti cinematici e meccanici sia necessaria sembra seguire immediatamente dalle equazioni fondamentali della meccanica quantistica. Quando è data una certa massa m , nel nostro modo di vedere usuale ha un certo significato facilmente comprensibile parlare della posizione e della velocità del centro di gravità di questa massa m . Nella meccanica quantistica deve però sussistere una relazione $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$ tra massa, posizione e velocità. Abbiamo quindi buon motivo di sospettare dell'uso acritico di quelle parole "posizione" e "velocità". Se si ammette che per processi in spazi e tempi molto piccoli delle discontinuità di un qualche tipo siano tipiche, allora è persino immediatamente plausibile un fallimento anche dei concetti "posizione" e "velocità": si pensi ad esempio al movimento unidimensionale di un punto massivo, si potrà così tracciare, in una teoria del continuo, una curva $x(t)$ per la traiettoria della particella (più esattamente: del suo centro di gravità) (Fig. 1), la tangente dando in ogni momento la velocità. In una teoria del discontinuo, d'altra parte, apparirà al posto di questa curva per esempio una serie di punti di distanziamento finito (Fig. 2). In questo caso è evidentemente insensato parlare della velocità in una certa posizione perché la velocità può essere definita solo attraverso due punti e perché, come segue facendo il ragionamento al contrario, a ciascun punto corrispondono due velocità diverse.

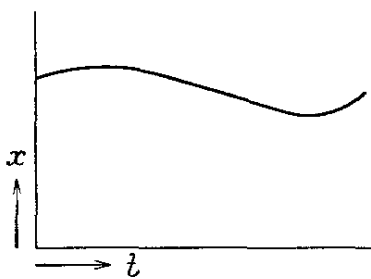


Fig. 1.

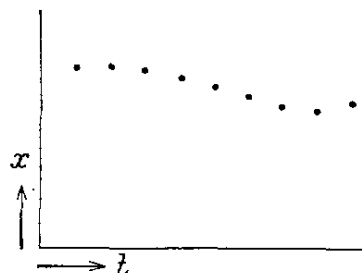


Fig. 2.

Da qui sorge la domanda, se non sia possibile, attraverso una più accurata analisi di quei concetti cinematici e meccanici, risolvere le contraddizioni che finora sussistono nell'interpretazione osservativa della meccanica quantistica e di arrivare a una comprensione chiara delle relazioni quantomeccaniche.¹⁾

¹Il presente lavoro è sorto dagli sforzi e dai desideri ai quali già molto prima della nascita della meccanica quantistica altri ricercatori hanno dato chiara espressione. Ricordo qui specialmente i lavori di Bohr sui postulati fondamentali della teoria quantistica (per esempio ZS. f. Phys. **13**, 117, 1923) e le discussioni di Einstein sulla relazione tra campo di onda e quanti di luce. In tempi più recenti, i problemi di cui si parla qui sono stati discussi e le domande che sorgono sono state parzialmente risposte nel modo più chiaro possibile da W. Pauli (Teoria quantistica, Handb. d. Phys., Bd. XXIII, d'ora in avanti citato come l.c.); con la meccanica quantistica è cambiato solo poco della formulazione di questi problemi da parte di Pauli. È per me anche una gioia eccezionale ringraziare qui il Sig. W. Pauli per i molteplici stimoli che ho ricevuto da discussioni orali e scritte avute con lui, e che hanno contribuito in maniera essenziale al presente lavoro.

§ 1. I concetti: posizione, traiettoria, velocità, energia.

Per poter seguire il comportamento quantomeccanico di un qualche oggetto si deve conoscere la massa di questo oggetto e la forza di interazione reciproca con un qualche campo e altri oggetti. Solo così la funzione Hamiltoniana del sistema quantomeccanico può essere data. [Le seguenti riflessioni devono relazionarsi in generale alla meccanica quantistica non relativistica, giacché le leggi dell'elettrodinamica quantistica sono conosciute ancora in modo incompleto]¹). Sulla "forma" dell'oggetto una qualunque altra affermazione non è necessaria, è più conveniente designare la totalità di quelle forze di interazione reciproca con la parola forma.

Quando ci si vuole chiarire che cosa si intenda per "posizione dell'oggetto", per esempio dell'elettrone (relativamente a un sistema di riferimento dato), bisogna stabilire certi esperimenti con l'aiuto dei quali si ha l'intenzione di misurare la "posizione dell'elettrone"; altrimenti, questa parola non ha senso. Di tali esperimenti, che in principio permettono di determinare la "posizione dell'elettrone" persino con precisione a piacere, non c'è penuria, per esempio: si illumina l'elettrone e lo si osserva con un microscopio. La più alta precisione raggiungibile per la determinazione della posizione è qui data essenzialmente dalla lunghezza d'onda della luce utilizzata. Ma allora, in principio ci si potrà costruire un microscopio a raggi Γ e con questo si potrà determinare la posizione con una precisione grande quanto si vuole. È però essenziale una circostanza concomitante in questa determinazione: l'effetto Compton. Ogni osservazione del fascio di luce che viene dall'elettrone presuppone un effetto fotoelettrico (nell'occhio, sulla lastra fotografica, nella fotocellula), che può dunque essere anche interpretato come un quanto di luce che incontra un elettrone, viene da questo riflesso o deviato e, poi deviato nuovamente attraverso le lenti del microscopio, provoca l'effetto luminoso. Nel momento della determinazione della posizione, dunque nel momento in cui il quanto di luce viene deviato dall'elettrone, l'elettrone cambia il suo impulso in maniera discontinua. Questo cambiamento è tanto maggiore quanto minore la lunghezza d'onda della luce utilizzata, ovvero quanto più esatta è la determinazione della posizione. Nel momento in cui la posizione dell'elettrone è nota, il suo impulso può quindi essere conosciuto solamente a meno di grandezze che corrispondono a quel cambiamento discontinuo; dunque quanto più esattamente la posizione è determinata, tanto meno esattamente è noto l'impulso, e viceversa; proprio qui scorgiamo una diretta e osservabile dimostrazione della relazione $\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \frac{h}{2\pi i}$. Sia q_1 l'esattezza con la quale il valore q è conosciuta (q_1 è per esempio l'errore medio di q), dunque qui la lunghezza d'onda della luce, p_1 l'esattezza con la quale il valore p è determinabile, dunque qui il cambiamento discontinuo di p dovuto all'effetto Compton, allora p_1 e q_1 , secondo formule elementari dell'effetto Compton, si trovano nella relazione

$$p_1 q_1 \sim h . \tag{1}$$

Che la relazione (1) stia in legame matematico diretto con la relazione di commutazione $\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \frac{h}{2\pi i}$, verrà mostrato in seguito. Si noti qui che l'equazione (1)

¹Recentemente sono stati però raggiunti grandi progressi in questa area grazie ai lavori di P. Dirac [Proc. Roy. Soc. (A) **114**. 243, 1927 e ricerche che verranno pubblicate in futuro].

è l'espressione precisa per quei fatti che prima si cercava di descrivere attraverso la ripartizione dello spazio delle fasi in celle di grandezza h .

Per la determinazione della posizione dell'elettrone si possono eseguire anche altri esperimenti, per esempio tentativi di collisione. Una misura esatta della posizione richiede urti con particelle molto veloci, giacché con elettroni lenti i fenomeni di deviazione, che secondo Einstein sono una conseguenza delle onde di de Broglie (vedasi per esempio l'effetto Ramsauer), impediscono un'esatta determinazione della posizione. Per un'esatta misurazione della posizione l'impulso dell'elettrone varia dunque di nuovo discontinuamente e una semplice stima dell'esattezza con le formule delle onde di de Broglie dà di nuovo la relazione (1).

Con questa discussione il concetto "posizione dell'elettrone" sembra definito abbastanza chiaramente e mi si lasci aggiungere ora ancora una parola sulla "grandezza" dell'elettrone. Se due particelle molto veloci incontrano l'elettrone una dopo quell'altra in un intervallo di tempo molto corto Δt , allora le posizioni dell'elettrone determinate dalle due particelle si trovano molto prossime una all'altra a una distanza Δl . Dalle leggi, che sono osservate per i raggi α , concludiamo che Δl si riesce a ridurre fino a grandezze dell'ordine di 10^{-12} cm, solo se Δt viene scelto sufficientemente piccolo e le particelle sono sufficientemente veloci. È in questo senso che diciamo che l'elettrone è un corpuscolo il cui raggio non è maggiore di 10^{-12} cm.

Passiamo ora al concetto di "traiettoria dell'elettrone". Come traiettoria intendiamo una serie di punti nello spazio (in un dato sistema di riferimento), che l'elettrone assume uno dopo l'altro. Siccome già sappiamo che cosa si intenda per "posizione ad un certo tempo", non appaiono qui nuove difficoltà. Tuttavia, è facile vedere che, per esempio, l'espressione spesso usata: la "traiettoria 1 S dell'elettrone nell'atomo di idrogeno", dal nostro punto di vista non ha senso. Per misurare questa "traiettoria" 1 S l'atomo dovrebbe infatti essere illuminato con luce la cui lunghezza d'onda è comunque notevolmente minore di 10^{-8} cm. Di una tale luce basta però un solo quanto per scalzare completamente l'elettrone fuori dalla sua "traiettoria" (per cui sempre e solo un unico punto di una tale traiettoria può essere definito), la parola "traiettoria" non ha quindi qui alcun significato ragionevole. Ciò può essere già dedotto semplicemente dalle possibilità sperimentali, senza la conoscenza di nuove teorie.

D'altra parte, la misurazione di posizione ideata può venire effettuata per molti atomi nello stato 1 S . (Atomi in un dato stato "stazionario" possono essere isolati per esempio dall'esperimento di Stern-Gerlach.) Dev'esserci dunque, per un determinato stato, per esempio 1 S , dell'atomo, una funzione di probabilità per la posizione dell'elettrone, che corrisponde al valore medio su tutte le fasi della traiettoria classica e che è determinabile attraverso la misura con arbitraria precisione. Secondo Born¹⁾ questa funzione è data da $\psi_{1S}(q)\bar{\psi}_{1S}(q)$, dove ψ_{1S} rappresenta

¹Il significato statistico delle onde di de Broglie fu formulato per la prima volta da A. Einstein (Sitzungber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1925, S. 3). Questo elemento statistico nella meccanica quantistica gioca quindi un ruolo essenziale in M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, Meccanica Quantistica II (ZS. f. Phys. **35**, 557, 1926), cf. Cap. 4, § 3, e P. Jordan (ZS. f. Phys. **37**, 376, 1926); ciò viene analizzato matematicamente in un fondamentale lavoro di M. Born (ZS. f. Phys. **38**, 803, 1926) e usato per l'interpretazione dei fenomeni di collisione. La motivazione dell'approccio probabilistico a partire dalla teoria di trasformazione delle matrici si trova nei

la funzione d'onda di Schrödinger corrispondente allo stato $1S$. Con Dirac¹⁾ e Jordan¹⁾ vorrei dire, considerando generalizzazioni ulteriori: la probabilità è data da $S(1S, q)\bar{S}(1S, q)$, dove $S(1S, q)$ rappresenta quella colonna della matrice di trasformazione $S(E, q)$ da E verso q , che appartiene a $E = E_{1S}$ ($E =$ energia).

Dato che nella teoria quantistica ad un determinato stato, per esempio $1S$, solamente la funzione di probabilità della posizione dell'elettrone può essere data, ci si può scorgere dentro, con Born e Jordan, un tratto statistico caratteristico della teoria quantistica, in contrapposizione alla teoria classica. Si può però anche dire con Dirac, se si vuole, che la statistica venga introdotta dai nostri esperimenti. Infatti si potrebbe evidentemente dare anche nella teoria classica solamente la probabilità di una determinata posizione dell'elettrone, fintanto che non conosciamo le fasi dell'atomo. La differenza tra meccanica classica e quantistica consiste anzi in ciò: classicamente noi possiamo sempre pensare le fasi come determinate da esperimenti precedenti. In realtà ciò è però impossibile, perché ogni esperimento per la determinazione della fase rovina o muta l'atomo. In un certo "stato" stazionario dell'atomo le fasi sono, in principio, indeterminate, cosa che si può vedere come spiegazione diretta delle note equazioni

$$\mathbf{E}t - t\mathbf{E} = \frac{h}{2\pi i} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{J}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{J} = \frac{h}{2\pi i}$$

(\mathbf{J} = variabile azione, \mathbf{w} = variabile angolo).

La parola "velocità" di un oggetto si può definire facilmente attraverso misure, se si tratta di un movimento non soggetto a forze. Si può per esempio illuminare l'oggetto con luce rossa e attraverso l'effetto Doppler della luce diffusa ricavare la velocità della particella. La determinazione della velocità diventa tanto più precisa quanto maggiore la lunghezza d'onda della luce utilizzata, dato che la variazione di velocità della particella per quanto di luce dovuta all'effetto Compton diventa tanto minore. La determinazione della posizione diventa corrispondentemente imprecisa, come corrisponde all'equazione (1). Se la velocità dell'elettrone nell'atomo dovesse essere misurata in un certo istante, allora si dovrà per esempio far sparire improvvisamente in quest'istante la carica nucleare e le forze di restanti elettroni, in modo che da lì il movimento avvenga senza forze e si eseguirà quindi la determinazione data sopra. Di nuovo ci si può convincere, come sopra, che una funzione $p(t)$ per un dato stato dell'atomo, per esempio $1S$, non può essere definita. Per contro, c'è di nuovo una funzione di probabilità di p in questo stato, che secondo Dirac e Jordan ha il valore $S(1S, p)\bar{S}(1S, p)$. $S(1S, p)$ indica nuovamente quella colonna della matrice di trasformazione $S(E, p)$, di \mathbf{E} verso \mathbf{p} , che appartiene a $E = E_{1S}$.

Infine, si richiami l'attenzione ancora sugli esperimenti che permettono di misurare l'energia o la variabile d'azione; tali esperimenti sono specialmente importanti, giacché solo con il loro aiuto possiamo definire che cosa intendiamo quando parliamo di variazione discontinua dell'energia e di J . Gli esperimenti di collisione di Franck-Hertz permettono di ricondurre la misura dell'energia dell'atomo alla

lavori: W. Heisenberg (ZS. f. Phys. **40**, 501, 1926), P. Jordan (ibid. **40**, 661, 1926), W. Pauli (Ann. in ZS. f. Phys. **41**, 81, 1927), P. Dirac (Proc. Roy. Soc. (A) **113**, 621, 1926), P. Jordan (ZS. f. Phys. **40**, 809, 1926). In forma generale, il lato statistico della meccanica quantistica è discusso in P. Jordan (Naturwiss. **15**, 105, 1927) e M. Born (Naturwiss. **15**, 238, 1927).

misura dell'energia di un elettrone in movimento rettilineo, grazie al teorema dell'energia nella teoria quantistica. Questa misura si può effettuare, in principio, con arbitraria accuratezza solo se si rinuncia a determinare allo stesso tempo la posizione dell'elettrone, cioè della fase (si compari sopra la determinazione di p), corrispondendo alla relazione $\mathbf{Et} - t\mathbf{E} = \frac{h}{2\pi i}$. L'esperimento di Stern-Gerlach permette la determinazione del momento magnetico o di un momento elettrico medio dell'atomo, dunque la misurazione di grandezze che dipendono solamente dalla variabile di azione J . Le fasi rimangono, in principio, indeterminate. Così come non ha senso parlare di frequenza di un'onda luminosa in un certo istante, non si può parlare di energia dell'atomo in un dato momento. A ciò corrisponde la circostanza, nell'esperimento di Stern-Gerlach, che l'accuratezza della misura di energia diventa tanto più piccola quanto minore è l'intervallo di tempo in cui l'atomo si trova sotto l'influsso della forza deviante¹). Un limite superiore per la forza deviante è quindi dato dal fatto che l'energia potenziale di quella forza deviante dentro il fascio di radiazione può variare solamente di quantità che sono considerevolmente più piccole delle differenze di energia degli stati stazionari, se una determinazione dell'energia degli stati stazionari dovesse essere possibile. Sia E_1 una quantità di energia che soddisfi questa condizione (E_1 dà allo stesso tempo l'accuratezza di quella misura di energia), allora E_1/d è dunque il valore massimo della forza deviante, dove d rappresenta la larghezza del fascio di radiazione (misurabile attraverso l'estensione dello schermo utilizzato). La deviazione angolare del raggio atomico è dunque $\frac{E_1 t_1}{dp}$, dove t_1 indica l'intervallo di tempo in cui l'atomo si trova sotto l'influsso della forza deviante, p l'impulso dell'atomo nella direzione del raggio. Affinché una misurazione sia possibile, questa deviazione deve essere almeno dello stesso ordine di grandezza del naturale sparpagliamento del raggio, che avviene sullo schermo a causa della diffrazione. La deviazione angolare per diffrazione è dell'ordine di λ/d , se λ rappresenta la lunghezza d'onda di de Broglie, dunque

$$\frac{\lambda}{d} \sim \frac{E_1 t_1}{dp} \quad \text{o, siccome} \quad \lambda = \frac{h}{p}, \quad E_1 t_1 \sim h. \quad (2)$$

Questa equazione corrisponde all'equazione (1) e mostra come una determinazione esatta dell'energia possa essere raggiunta solo con una corrispondente inesattezza nel tempo.

§ 2. La teoria di Dirac-Jordan. I risultati del paragrafo precedente si potrebbero riassumere e generalizzare nella seguente affermazione: tutti i concetti che sono usati nella teoria classica per la descrizione di un sistema meccanico si possono definire esattamente anche per processi atomici, analogamente ai concetti classici. Gli esperimenti che servono a tale definizione portano però in sé, secondo la pura esperienza, una indeterminazione, quando richiediamo loro una determinazione simultanea di due quantità canonicamente coniugate. Il grado di questa indeterminazione è dato dalla relazione (1) (estesa a qualsivoglia variabili canonicamente coniugate). È evidente qui paragonare la teoria quantistica con la teoria della relatività speciale. Secondo la teoria relativistica la parola "simultaneo" non si può

¹Si veda su questo punto W. Pauli, l. c. S. 61.

definire di altra maniera che attraverso esperimenti, in cui c'entri essenzialmente la velocità di propagazione della luce. Se ci fosse una definizione “più restrittiva” di simultaneità, dunque se esistessero per esempio segnali che si propagano con velocità infinita, allora la teoria della relatività sarebbe impossibile. Dato che però certi segnali non ci sono, e dato che anzi proprio la velocità della luce entra nella definizione di simultaneità, c'è spazio per il postulato della costanza della velocità della luce, per cui questo postulato non si trova in contraddizione con l'uso sensato delle parole “posizione, velocità, tempo”. Lo stesso dicasi per la definizione del concetto: “posizione e velocità dell'elettrone” nella teoria quantistica. Tutti gli esperimenti che possiamo impiegare per la definizione di queste parole, contengono necessariamente l'inesattezza data dall'equazione (1), anche se permettono di definire esattamente i singoli concetti p e q . Se ci fossero esperimenti che rendessero possibile simultaneamente una determinazione di p e q “più precisa” di quanto mostri l'equazione (1), la meccanica quantistica sarebbe così impossibile. Questa inesattezza definita dall'equazione 1 crea quindi spazio per la validità delle relazioni che trovano la loro espressione pregnante nella relazione di commutazione quantomeccanica

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} ;$$

si rende possibile questa equazione senza che il significato fisico delle grandezze p e q debba essere modificato.

Per quei fenomeni fisici la cui formulazione quantistica è ancora sconosciuta (per esempio l'elettrodinamica), l'equazione (1) rappresenta un vincolo che potrebbe essere utile per la scoperta di una nuova legge. L'equazione (1) per la meccanica quantistica può essere dedotta per mezzo di una lieve generalizzazione a partire dalla formulazione di Dirac–Jordan. Quando stabiliamo, per il determinato valore η di un qualche parametro, la posizione q dell'elettrone come q' con un'approssimazione q_1 , possiamo esprimere questo fatto attraverso un'ampiezza di probabilità $S(\eta, q)$, che è considerevolmente diversa da zero solamente in una regione di grandezza approssimativamente q_1 intorno a q' . In particolare, è possibile stabilire

$$S(\eta, q) \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{h} p'(q-q')} , \text{ dunque } S\bar{S} \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{q_1^2}} . \quad (3)$$

Quindi vale per l'ampiezza di probabilità relativa a p

$$S(\eta, p) = \int S(\eta, q)S(q, p)dq . \quad (4)$$

Secondo Jordan si può affermare per $S(q, p)$

$$S(q, p) = e^{\frac{2\pi i pq}{h}} . \quad (5)$$

Quindi, secondo la (4), $S(\eta, p)$ sarà considerevolmente diverso da zero solamente per valori di p per cui $\frac{2\pi(p-p')q_1}{h}$ non sia essenzialmente maggiore di 1. In particolare nel caso (3) vale:

$$S(\eta, p) \text{ prop } \int e^{\frac{2\pi i(p-p')q}{h} - \frac{(q'-q)^2}{2q_1^2}} dq ,$$

che implica

$$S(\eta, p) \text{ prop } e^{-\frac{(p-p')^2}{2p_1^2} + \frac{2\pi i}{h} q'(p-p')}, \text{ dunque } S\bar{S} \text{ prop } e^{-\frac{(p-p')^2}{p_1^2}},$$

dove

$$p_1 q_1 = \frac{h}{2\pi}. \quad (6)$$

L'ipotesi (3) per $S(\eta, q)$ corrisponde quindi al fatto sperimentale, per cui è stato misurato il valore p' per p e q' per q [con limite di precisione (6)]

Di forma puramente matematica, è caratteristico per la formulazione di Dirac–Jordan della meccanica quantistica che le relazioni tra \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{E} , etc. possano essere scritte come equazioni tra matrici molto generali, di forma che una qualunque prestabilita quantità della teoria quantistica appaia come matrice diagonale. La possibilità di una tale maniera di scrittura convince, se si interpreta le matrici visivamente come tensori (per esempio il momento di inerzia) nello spazio multidimensionale, tra i quali sussistono relazioni matematiche. Si può porre gli assi del sistema di coordinate in cui si esprimono queste relazioni matematiche sempre lungo gli assi principali di uno di questi tensori. Inoltre la relazione matematica tra due tensori A e B si può sempre caratterizzare attraverso le formule di trasformazione, che trasferiscono un sistema di coordinate orientato in relazione all'asse principale di A in un altro orientato secondo l'asse principale di B . L'ultima formulazione corrisponde alla teoria di Schrödinger. Come formulazione della meccanica quantistica veramente “invariante”, indipendente da tutti i sistemi di coordinate, si considererà l'approccio di Dirac delle cifre q . Quando vogliamo ricavare un risultato fisico da quel modello matematico, dobbiamo attribuire numeri alle grandezze teoriche quantistiche, dunque alle matrici (o ai “tensori” in uno spazio multidimensionale). Ciò è da intendersi così, che in quello spazio multidimensionale viene prestabilita una direzione arbitraria (ovvero viene stabilita dal tipo di esperimento impiegato) e viene chiesto quale sia il “valore” della matrice (per esempio in quella idea del valore del momento di inerzia) in questa direzione prestabilita. Questa domanda ha quindi un senso univoco solamente quando la direzione prestabilita coincide con la direzione di uno degli assi principali di quella matrice; in questo caso esiste una risposta esatta alla domanda posta. Ma se la direzione prestabilita devia anche solo di poco da uno degli assi principali della matrice, allora si può parlare del “valore” della matrice nella direzione prestabilita con un certo probabile errore, con una certa imprecisione dalla dall'inclinazione relativa. Si può anche dire: ad ogni grandezza teorica quantistica o matrice di teoria quantistica può essere assegnato un numero che ne indica il “valore” con un certo probabile errore; l'errore probabilistico dipende dal sistema di coordinate; per ogni grandezza teorica quantistica esiste un sistema di coordinate in cui l'errore probabilistico scompare. Un dato esperimento quindi non può mai fornire informazioni esatte su tutte le grandezze teoriche quantistiche, anzi suddivide in una maniera caratteristica per l'esperimento le grandezze fisiche in “note” e “ignote” (ovvero: grandezze conosciute più o meno esattamente). I risultati di due esperimenti si possono quindi dedurre esattamente l'uno dall'altro solo se entrambi gli esperimenti suddividono allo stesso modo in “note” e “ignote” le grandezze fisiche (cioè quando i tensori in quello spazio multidimensionale usato più volte a titolo indicativo vengono “considerati” in entrambi gli esperimenti dalla stessa direzione). Se due esperimenti

adoperano suddivisioni diverse in grandezze “note” e “ignote”, allora la relazione dei risultati di quegli esperimenti si può dare correttamente solo statisticamente.

Per una discussione più dettagliata di questa connessione statistica si esegua un esperimento mentale. Una radiazione atomica tipo Stern-Gerlach viene inviata inizialmente attraverso un campo F_1 , che è così fortemente disomogeneo nella direzione di radiazione, da causare evidentemente molte transizioni attraverso “l’effetto di scuotimento”. In seguito, la radiazione atomica viaggia libera per un certo tempo, ma ad una certa distanza da F_1 comincia un secondo campo F_2 , similmente disomogeneo quanto F_1 . Tra F_1 e F_2 e oltre F_2 sia possibile misurare il numero di atomi nei vari stati stazionari mediante un campo magnetico eventualmente applicato. Le forze di radiazione degli atomi siano azzerate. Se sappiamo che un atomo si trovava nello stato di energia E_n prima di passare in F_1 , possiamo così affermare questo fatto sperimentale, assegnando una funzione d’onda all’atomo – per esempio nello spazio p – con energia definita E_n e fase indefinita β_n

$$S(E_n, p) = \psi(E_n, p) e^{-\frac{2\pi i E_n (\alpha + \beta_n)}{h}} .$$

Dopo aver attraversato il campo F_1 , questa funzione sarà cambiata in¹⁾

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} \psi(E_m, p) e^{-\frac{2\pi i E_m (\alpha + \beta_m)}{h}} \quad (7)$$

Siano qui i β_m in qualche modo determinati arbitrariamente, affinché i c_{nm} siano determinati univocamente da F_1 . La matrice c_{nm} trasforma i valori dell’energia prima del passaggio attraverso F_1 in quelli successivi al passaggio attraverso F_1 . Se eseguiamo successivamente a F_1 un determinazione degli stati stazionari, ad esempio mediante un campo magnetico disomogeneo, troveremo così con probabilità $c_{nm} \bar{c}_{nm}$, che l’atomo sia passato dallo stato n allo stato m . Se determiniamo sperimentalmente che l’atomo sia appena passato allo stato m , allora dovremo assegnargli, per il calcolo di tutto ciò che segue, non la funzione $\sum_m c_{nm} S_m$, ma proprio la funzione S_m , con una fase indefinita; attraverso la determinazione sperimentale: “stato m ” sceglieremmo dalla totalità delle diverse possibilità (c_{nm}) una determinata: m , però distruggeremmo allo stesso tempo, come verrà spiegato più avanti, tutto ciò che era ancora contenuto nelle grandezze c_{nm} in termini di relazioni di fase. Durante il passaggio della radiazione atomica attraverso F_2 viene ripetuta la stessa cosa come in F_1 . Siano d_{nm} i coefficienti della matrice di trasformazione che trasformano le energie prima di F_2 in quelle dopo F_2 . Se nessuna determinazione dello stato viene eseguita tra F_1 e F_2 , la autofunzione cambia secondo il seguente schema:

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} S(E_m, p) \xrightarrow{F_2} \sum_m \sum_l c_{nm} d_{ml} S(E_l, p) . \quad (8)$$

Si fissi $\sum_m c_{nm} d_{ml} = e_{nl}$. Se viene determinato lo stato stazionario dell’atomo dopo F_2 , si troverà lo stato l con una probabilità $e_{nl} \bar{e}_{nl}$. Se, d’altra parte, tra F_1 e F_2 venne fatta la determinazione: “stato m ”, allora la probabilità per l dopo F_2 sarà data da $d_{ml} \bar{d}_{ml}$. Ripetendo l’intero esperimento più volte (ed ogni volta determinando lo stato tra F_1 e F_2), si osserverà lo stato l dopo F_2 con la relativa

¹⁾Vedasi P. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **112**, 661, 1926 e M. Born, ZS. f. Phys. **40**, 167, 1926.

frequenza $Z_{nl} = \sum_m c_{nm} \bar{c}_{nm} d_{ml} \bar{d}_{ml}$. Questa espressione non corrisponde a $e_{nl} \bar{e}_{nl}$. Jordan (l.c.) ha pertanto parlato di “interferenza delle probabilità”. Ma non sono d’accordo, perché i due esperimenti che conducono rispettivamente a $e_{nl} \bar{e}_{nl}$ e Z_{nl} sono fisicamente veramente diversi. In un caso l’atomo non subisce tra F_1 ed F_2 alcun disturbo, nell’altro viene perturbato dagli apparati che consentono una determinazione dello stato stazionario. Questi apparati hanno come conseguenza che la “fase” dell’atomo cambia di quantità che sono in linea di principio incontrollabili, proprio come la quantità di moto cambia quando viene determinata la posizione dell’elettrone (vedasi § 1). Il campo magnetico che determina lo stato tra F_1 e F_2 altererà gli autovalori E , e durante l’osservazione della traiettoria del fascio atomico gli atomi (penso per esempio alle fotografie di Wilson) vengono decelerati statisticamente in modo diverso e incontrollabile, tra le altre cose. Questo ha come conseguenza che la matrice definitiva di trasformazione e_{nl} (dai valori dell’energia prima di entrare in F_1 a quelli dopo l’uscita da F_2) non è più data da $\sum_m c_{nm} d_{ml}$, ma ogni elemento della somma ha ancora un fattore di fase sconosciuto. Quindi possiamo solo aspettarci che il valore medio di $e_{nl} \bar{e}_{nl}$ su tutti questi possibili cambiamenti di fase sia uguale a Z_{nl} . Un semplice calcolo rivela che questo è il caso. — Possiamo dunque, secondo certe regole statistiche, dedurre da un esperimento i possibili risultati di un altro. L’altro esperimento stesso ne seleziona uno molto specifico tra una molteplicità di possibilità e quindi limita le possibilità per tutti gli esperimenti successivi. Una tale interpretazione dell’equazione per la matrice di trasformazione S o l’equazione d’onda di Schrödinger è possibile solo perché la somma delle soluzioni rappresenta di nuovo una soluzione. In questo vediamo il senso profondo della linearità delle equazioni di Schrödinger; quindi possono essere intese solo come equazioni per onde nello spazio delle fasi e quindi vorremmo considerare inutile qualsiasi tentativo di sostituire queste equazioni con altre non lineari, ad esempio nel caso relativistico (con più elettroni).

§ 3. Il passaggio dalla micro- alla macromeccanica. Attraverso l’analisi effettuata nelle sezioni precedenti delle parole “posizione dell’elettrone”, “velocità”, “energia”, e così via, i concetti della cinematica e della meccanica nella teoria quantistica mi sembrano sufficientemente chiariti, cosicché dev’essere possibile anche una chiara comprensione dei processi macroscopici dal punto di vista della meccanica quantistica. Il passaggio dalla micro- alla macromeccanica è già stato affrontato da Schrödinger ¹⁾, ma non credo che il ragionamento di Schrödinger tocchi l’essenza del problema, per i seguenti motivi: secondo Schrödinger, una somma di oscillazioni proprie dovrebbe essere in grado di produrre un pacchetto d’onda non troppo grande in stati di eccitazione elevata, che a sua volta esegue i movimenti periodici del’“elettrone” classico con periodici cambiamenti di dimensione. Per contro è da obiettare quanto segue: se il pacchetto d’onda avesse le proprietà descritte qui, la radiazione emessa dall’atomo potrebbe essere sviluppata in una serie di Fourier in cui le frequenze delle armoniche sono multipli interi di una frequenza fondamentale. Tuttavia, secondo la meccanica quantistica, le frequenze delle linee spettrali emesse dall’atomo non sono mai multipli interi di una frequenza fondamentale — ad eccezione del caso speciale dell’oscillatore armonico. Il ragionamento di Schrödinger può quindi essere applicabile solo per l’oscillatore armonico di cui

¹⁾E. Schrödinger, Naturwiss. **14**, 664, 1926.

si è occupato, in tutti gli altri casi un pacchetto d'onda si diffonde con l'andare del tempo su tutto lo spazio in prossimità dell'atomo. Quanto maggiore è lo stato di eccitazione dell'atomo, tanto più lentamente si verifica la dispersione del pacchetto d'onda. Ma se si aspetta abbastanza a lungo, tale dispersione avverrà. L'argomento sopra addotto sulla radiazione emessa dall'atomo si può per prima cosa applicare contro tutti gli esperimenti che mirano a una transizione diretta dalla meccanica quantistica alla meccanica classica per numeri quantici elevati. Per questo motivo, in passato si è cercato di evitare l'argomento facendo riferimento alla naturale diffusione della radiazione degli stati stazionari; senza dubbio erroneamente perché, in primo luogo, questa via d'uscita è bloccata nell'atomo di idrogeno a causa delle basse radiazioni presenti in condizioni di eccitazione elevate e, in secondo luogo, il passaggio dalla meccanica quantistica alla meccanica classica deve essere comprensibile anche senza basarsi sull'elettrodinamica. Bohr¹⁾ ha già sottolineato più volte in precedenza queste note difficoltà, che ostacolano una connessione diretta tra la teoria quantistica e la teoria classica. Li abbiamo spiegati di nuovo in modo così dettagliato perché sembrano essere stati recentemente dimenticati.

Credo che l'origine dell'“orbita” classica si possa formulare sinteticamente così: l'“orbita” sorge solo quando la osserviamo: sia dato, ad esempio, un atomo nel millesimo stato eccitato. Le dimensioni dell'orbita sono qui già relativamente grandi, cosicché basta, nel senso del § 1, effettuare la determinazione della posizione dell'elettrone con luce di lunghezza d'onda relativamente grande. Se la determinazione della posizione non deve essere troppo imprecisa, il rinculo di Compton avrà come conseguenza che l'atomo si troverà in uno stato dopo la collisione tra, diciamo, il 950 e il 1050; allo stesso tempo la quantità di moto dell'elettrone può essere dedotta dall'effetto Doppler con una precisione che può essere determinata dalla (1). Il fatto sperimentale così dato può essere caratterizzato da un pacchetto d'onda — o meglio da un pacchetto di probabilità — nello spazio q di dimensione data dalla lunghezza d'onda della luce utilizzata, composto essenzialmente da funzioni proprie comprese tra la 950 e la 1050, e da un corrispondente pacchetto nello spazio p . Dopo un po' di tempo venga eseguita una nuova determinazione di posizione con la stessa precisione. Il suo risultato si può stabilire solamente statisticamente, secondo il § 2, come possibili posizioni si considerano tutte quelle all'interno del pacchetto d'onda ora disperso, con una probabilità calcolabile. Ciò non sarebbe affatto diverso nella teoria classica, perché anche qui il risultato della determinazione della seconda posizione potrebbe essere dato solo statisticamente a causa dell'incertezza della prima determinazione; anche le orbite del sistema della teoria classica si diffonderebbero in modo simile al pacchetto d'onda. Tuttavia, le stesse leggi statistiche sono diverse nella meccanica quantistica e nella teoria classica. La seconda determinazione della posizione seleziona una certa “ q ” dalla totalità delle possibilità e limita le possibilità per tutte le determinazioni successive. Dopo la seconda determinazione della posizione, i risultati delle misurazioni successive possono essere calcolati solo assegnando un pacchetto d'onda “più piccolo” di dimensione λ all'elettrone (lunghezza d'onda della luce utilizzata per l'osservazione). Ogni determinazione della posizione riduce dunque il pacchetto d'onda alla sua dimensione originale λ . I “valori” delle variabili p e q sono noti con un certo grado

¹N. Bohr, Postulati di base della teoria quantistica, l. c.

di accuratezza durante tutti gli esperimenti. Che i valori di \mathbf{p} e \mathbf{q} soddisfino le equazioni del moto classiche entro questi limiti di accuratezza può essere dedotto direttamente dalle leggi della meccanica quantistica:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (9)$$

Come detto, l'orbita può essere però calcolata solo statisticamente a partire dalle condizioni iniziali, il che può essere visto come conseguenza della fondamentale indeterminazione delle condizioni iniziali. Le leggi statistiche sono diverse per la meccanica quantistica e la teoria classica; in determinate condizioni, questo può portare a differenze macroscopiche approssimative tra la teoria classica e quantistica. Prima di discuterne un esempio vorrei mostrare per un semplice sistema meccanico: il movimento senza forza di una massa puntiforme, come la transizione alla teoria classica discussa sopra deve essere formulata matematicamente. Le equazioni del moto (nel caso di un movimento unidimensionale) sono le seguenti

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2; \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{m} \mathbf{p}; \quad \dot{\mathbf{p}} = 0. \quad (10)$$

Poiché il tempo può essere trattato come un parametro (come un “numero c ”) se non ci sono forze esterne dipendenti dal tempo, la soluzione a queste equazioni è:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{m} \mathbf{p}_0 t + \mathbf{q}_0; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \quad (11)$$

dove \mathbf{p}_0 e \mathbf{q}_0 rappresentano quantità di moto e posizione al tempo $t = 0$. Al tempo $t = 0$ [si vedano le equazioni da (3) a (6)] venga misurato il valore $q_0 = q'$ con approssimazione q_1 , e $p_0 = p'$ con approssimazione p_1 . Per dedurre i “valori” di \mathbf{q} al tempo t dai “valori” di \mathbf{p}_0 e \mathbf{q}_0 , secondo Dirac e Jordan bisogna trovare quella funzione di trasformazione che trasforma tutte le matrici in cui \mathbf{q}_0 appare come matrice diagonale in quelle in cui appare \mathbf{q} come matrice diagonale. \mathbf{p}_0 può essere sostituito dall'operatore $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0}$ nello schema di matrice in cui \mathbf{q}_0 appare come una matrice diagonale. Secondo Dirac [cfr. equazione (11)] vale quindi come ampiezza di trasformazione ricercata $S(q_0; q)$ l'equazione differenziale:

$$\left\{ \frac{t}{m} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0} + q_0 \right\} S(q_0, q) = q S(q_0, q) \quad (12)$$

$$\frac{t}{m} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S}{\partial q_0} = (q_0 - q) S(q_0, q)$$

$$S(q_0, q) = \text{cost.} \cdot e^{\frac{2\pi m \int (q - q_0) dq_0}{\hbar t}} \quad (13)$$

$S\bar{S}$ è quindi indipendente da q_0 , cioè se al tempo $t = 0$ q_0 è esattamente noto, allora in qualunque tempo $t > 0$ tutti i valori di q sono ugualmente probabili, cioè la probabilità che q si trovi in un intervallo finito è praticamente zero. Questo è del tutto ovvio. Perché l'esatta determinazione di q_0 porta a un rinculo Compton infinitamente grande. Lo stesso si applicherebbe ovviamente a qualsiasi sistema

meccanico arbitrario. Ma se q_0 fosse noto solo con una precisione di q_1 al tempo $t = 0$ e p_0 con una precisione di p_1 [cfr. l'equazione (3)],

$$S(\eta, q_0) = \text{cost. } e^{-\frac{(q_0 - q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{h} p'(q_0 - q')},$$

quindi la funzione di probabilità per q deve essere calcolata secondo la formula

$$S(\eta, q) = \int S(\eta, q_0) S(q_0, q) dq_0.$$

Si ottiene

$$S(\eta, q) = \text{cost. } \int e^{\frac{2\pi i m}{th} \left[q_0 \left(q - \frac{t}{m} p' \right) - \frac{q_0^2}{2} \right] - \frac{(q' - q_0)^2}{2q_1^2}} dq_0. \quad (14)$$

Introducendo l'abbreviazione

$$\beta = \frac{th}{2\pi m q_1^2}, \quad (15)$$

l'esponente nella (14) diventa

$$-\frac{1}{2q_1^2} \left\{ q_0^2 \left(1 + \frac{i}{\beta} \right) - 2q_0 \left(q' + \frac{i}{\beta} \left(q - \frac{t}{m} p' \right) \right) + q'^2 \right\}.$$

Il termine con q'^2 può essere incluso nella costante (fattore indipendente da q) e l'integrazione risulta in

$$S(\eta, q) = \text{cost. } e^{\frac{1}{2q_1^2} \frac{\left[q' + \frac{i}{\beta} \left(q - \frac{t}{m} p' \right) \right]^2}{1 + \frac{i}{\beta}}} = \text{cost. } e^{-\frac{\left(q - \frac{t}{m} p' - i\beta q' \right)^2 \left(1 - \frac{i}{\beta} \right)}{2q_1^2 (1 + \beta^2)}}. \quad (16)$$

Ne consegue

$$S(\eta, q) \bar{S}(\eta, q) = \text{cost. } e^{-\frac{\left(q - \frac{t}{m} p' - q' \right)^2}{q_1^2 (1 + \beta^2)}}. \quad (17)$$

L'elettrone si trova dunque nel punto $\frac{t}{m} p' + q'$ al tempo t con una precisione $q_1 \sqrt{1 + \beta^2}$. Il "pacchetto d'onda" o meglio "pacchetto di probabilità" è aumentato del fattore $\sqrt{1 + \beta^2}$. Secondo la (15), β è proporzionale al tempo t , inversamente proporzionale alla massa — questo è immediatamente plausibile — e inversamente proporzionale a q_1^2 . Una precisione eccessiva in q_0 ha come conseguenza una eccessiva imprecisione in p_0 e quindi porta anche a una grande imprecisione in q . Il parametro η , che avevamo introdotto sopra per motivi formali, potrebbe essere qui omesso in tutte le formule, poiché non entra nel calcolo.

Come esempio del fatto che la differenza delle leggi statistiche classiche da quelle teoriche quantistiche possa eventualmente portare a differenze macroscopiche approssimative tra i risultati delle due teorie, verrà discussa brevemente la riflessione di un flusso di elettroni su un reticolo. Se la costante reticolare è dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda di de Broglie degli elettroni, la riflessione avviene in certe direzioni spaziali discrete, come la riflessione della luce su un reticolo. La teoria classica dà qui qualcos'altro macroscopicamente. Ciononostante, non possiamo in nessun modo trovare nell'orbita di un singolo elettrone una contraddizione con la teoria classica. Potremmo farlo se potessimo, ad esempio, dirigere l'elettrone

verso un determinato punto su una linea della griglia e poi scoprire che la riflessione lì non è classica. Ma se vogliamo determinare la posizione dell'elettrone in modo così preciso da poter dire quale punto di una linea della griglia colpisce, l'elettrone ottiene a causa di questa determinazione della posizione una grande velocità per cui la lunghezza d'onda di de Broglie dell'elettrone diventa così tanto più piccola che ora la riflessione può e avverrà realmente in questa approssimazione nella direzione classicamente prescritta senza contraddire le leggi della teoria quantistica.

§ 4. Discussione di alcuni particolari esperimenti mentali. Secondo l'interpretazione descrittiva della teoria quantistica qui tentata, i tempi delle transizioni e degli altrettanto concreti "salti quantistici", devono essere accertabili attraverso misurazioni, come per esempio le energie negli stati stazionari. La precisione con cui un tale istante temporale può essere determinato, è dato da $\frac{h}{\Delta E}$ secondo l'equazione (2)¹), se ΔE indica la variazione di energia durante il salto quantistico. Pensiamo al seguente esperimento: un atomo al tempo $t = 0$ nello stato 2 passa, irradiando, allo stato fondamentale 1. In maniera analoga all'equazione (7), può quindi essere assegnata all'atomo l'autofunzione

$$S(t, p) = e^{-\alpha t} \psi(E_2, p) e^{-\frac{2\pi i E_2 t}{h}} + \sqrt{1 - e^{-2\alpha t}} \psi(E_1, p) e^{-\frac{2\pi i E_1 t}{h}} \quad (18)$$

se assumiamo che l'attenuazione della radiazione si esprima in un fattore della forma $e^{-\alpha t}$ nell'autofunzione (la vera dipendenza forse non è così semplice). Questo atomo venga mandato attraverso un campo magnetico disomogeneo per misurare la sua energia, come è frequente nell'esperimento di Stern-Gerlach, ma certo il campo disomogeneo dovrebbe seguire il raggio atomico per un lungo tratto. L'accelerazione istantanea si misura per esempio dividendo l'intera distanza che il raggio atomico percorre nel campo magnetico in piccole sezioni, al termine di ciascuna delle quali si determina la deflessione del raggio. A seconda della velocità del raggio atomico, alla suddivisione in segmenti corrisponde per l'atomo una suddivisione in piccoli intervalli di tempo Δt . Secondo l'equazione (2) del § 1, all'intervallo Δt corrisponde un'approssimazione nell'energia di $\frac{h}{\Delta t}$. La probabilità di misurare una certa energia E può essere dedotta direttamente da $S(p, E)$ ed è quindi calcolata nell'intervallo da $n\Delta t$ a $(n+1)\Delta t$ da:

$$S(p, E)_{n\Delta t \rightarrow (n+1)\Delta t} = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} S(p, t) e^{\frac{2\pi i E t}{h}} dt .$$

Se al tempo $(n+1)\Delta t$ vien fatta l'affermazione: "stato 2", allora non deve più essere assegnata all'atomo l'autofunzione (18) per tutto il seguito, ma una, che emerge dalla (18), se si sostituisce t con $t - (n+1)\Delta t$. Se invece si determina: "stato 1", da quel momento in poi bisogna assegnare all'atomo l'autofunzione:

$$\psi(E_1, p) e^{-\frac{2\pi i E_1 t}{h}} .$$

Quindi si osserverà prima in una serie di intervalli Δt : "stato 2", quindi continuamente "stato 1". Affinché sia ancora possibile una distinzione tra i due stati,

¹Vedasi W. Pauli, l. c. S. 12

Δt non deve essere spinto sotto h . Il momento della transizione può quindi essere determinato con questa approssimazione. Quando si parla di cambiamento discontinuo di energia, si intende un esperimento del tipo appena descritto, del tutto in linea con la vecchia concezione della teoria quantistica fondata da Planck, Einstein e Bohr. Siccome, in linea di principio, un tale esperimento è realizzabile, deve essere possibile un accordo sul suo esito.

Nei postulati di base della teoria quantistica di Bohr, l'energia di un atomo, come i valori delle variabili di azione J , ha il vantaggio rispetto ad altre quantità determinabili (posizione dell'elettrone, ecc.) che il suo valore numerico può sempre essere dato. Questa posizione preferenziale, che l'energia assume rispetto alle altre grandezze quantomeccaniche, è però dovuta solo al fatto che nei sistemi chiusi rappresenta un integrale delle equazioni di moto (per la matrice energia vale $\mathbf{E} = \text{cost}$); nel caso di sistemi non chiusi, invece, l'energia non si distinguerà da nessun'altra quantità quantomeccanica. In particolare, si potranno specificare esperimenti in cui si possono misurare esattamente le fasi w dell'atomo, in cui però l'energia rimane in linea di principio indeterminata, corrispondente ad una relazione $\mathbf{Jw} - \mathbf{wJ} = \frac{h}{2\pi i}$ o $J_1 w_1 \sim h$. Per esempio la risonanza di fluorescenza rappresenta un tale esperimento. Irradiando un atomo con una frequenza naturale, diciamo $\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h}$, l'atomo vibra così in fase con la radiazione esterna, per cui in linea di principio non ha senso chiedere in quale stato E_1 o E_2 vibri l'atomo. La relazione di fase tra l'atomo e la radiazione esterna si può determinare ad esempio attraverso la relazione di fase di molti atomi tra loro (esperimenti di Woods). Se si preferisce astenersi da esperimenti con radiazione, la relazione di fase si può anche misurare in modo tale da effettuare determinazioni di posizione esatte, nel senso del § 1, dell'elettrone in tempi diversi rispetto alla fase della luce incidente (su molti atomi). La "funzione d'onda"

$$S(q, t) = c_2 \psi_2(E_2, q) e^{-\frac{2\pi i(E_2 t + \beta)}{h}} + \sqrt{1 - c_2^2} \psi_1(E_1, q) e^{-\frac{2\pi i E_1 t}{h}} \quad (19)$$

può essere assegnata al singolo atomo; qui c_2 dipende dall'intensità e β dalla fase della luce irradiata. Quindi la probabilità di una certa posizione q è

$$S(q, t) \bar{S}(q, t) = c_2^2 \psi_2 \bar{\psi}_2 + (1 - c_2^2) \psi_1 \bar{\psi}_1 + c_2 \sqrt{1 - c_2^2} \left(\psi_2 \bar{\psi}_1 e^{-\frac{2\pi i}{h}[(E_2 - E_1)t + \beta]} + \bar{\psi}_2 \psi_1 e^{+\frac{2\pi i}{h}[(E_2 - E_1)t + \beta]} \right). \quad (20)$$

Il termine periodico in (20) è separabile sperimentalmente dal termine non periodico, poiché le determinazioni della posizione possono essere effettuate per diverse fasi della luce irradiata.

In un noto esperimento mentale fornito da Bohr, gli atomi di un fascio atomico di Stern-Gerlach vengono prima eccitati in una certa posizione fino alla risonanza di fluorescenza tramite luce irradiata. Dopo un tratto di cammino attraversano un campo magnetico disomogeneo; la radiazione emessa dagli atomi può essere osservata davanti e dietro il campo magnetico. Prima che gli atomi entrino nel campo magnetico, c'è una normale fluorescenza di risonanza, cioè, analogamente alla teoria della dispersione, si deve presumere che tutti gli atomi emettano onde sferiche in fase con la luce incidente. Quest'ultima visione è inizialmente in contrasto con

ciò che risulta da un'applicazione approssimativa della teoria quantistica della luce o delle regole di base della teoria quantistica: poiché si potrebbe concludere da essa che solo pochi atomi vengono portati nello “stato superiore” assorbendo un quanto di luce, l'intera radiazione di risonanza verrebbe quindi da pochi centri eccitati che irradiano intensamente. È quindi ovvio prima dire: la concezione quantistica della luce può essere usata solo qui per l'equilibrio energia-quantità di moto, “nella realtà” tutti gli atomi nello stato inferiore emettono onde sferiche deboli e coerenti. Tuttavia, dopo che gli atomi hanno attraversato il campo magnetico, difficilmente possono esserci dubbi che il fascio atomico si sia diviso in due fasci, uno dei quali corrisponde agli atomi nello stato superiore e l'altro agli atomi nello stato inferiore. Ora, se gli atomi nello stato inferiore irradiano, ciò sarebbe una grave violazione della legge dell'energia, perché l'intera energia di eccitazione si trova nel raggio atomico con gli atomi nello stato superiore. Piuttosto, non può esserci dubbio che dietro il campo magnetico solo il raggio atomico con gli stati superiori emette luce — e per di più luce incoerente — dai pochi atomi che irradiano intensamente nello stato superiore. Come ha mostrato Bohr, questo esperimento rende particolarmente chiaro quale cautela sia spesso necessaria quando si usa il termine “stato stazionario”. Secondo la teoria quantistica qui sviluppata, può essere condotta senza difficoltà una discussione dell'esperimento di Bohr. Nel campo di radiazione esterno le fasi degli atomi sono determinate, quindi non ha senso parlare di energia dell'atomo. Anche dopo che l'atomo ha lasciato il campo di radiazione, non si può dire che si trovasse in un certo stato stazionario, a meno che non ci si informi riguardo le proprietà di coerenza della radiazione. Ma si possono fare esperimenti per scoprire in che stato si trovi l'atomo; il risultato di questo esperimento può essere dichiarato solo statisticamente. Un tale esperimento viene effettivamente condotto dal campo magnetico disomogeneo. Dietro il campo magnetico le energie degli atomi sono determinate, dunque le fasi sono indeterminate. La radiazione avviene qui in modo incoerente e solo dagli atomi nello stato superiore. Il campo magnetico determina le energie e distrugge la relazione di fase. L'esperimento pensato di Bohr è una spiegazione molto bella del fatto che l'energia dell'atomo “in realtà” non è un numero, ma una matrice. La legge di conservazione vale per la matrice di energia e quindi anche per il valore dell'energia con la precisione con cui vengono rispettivamente misurati. L'annullamento della relazione di fase può essere ottenuto col seguente calcolo: siano Q le coordinate del centro di gravità dell'atomo, così si assegnerà all'atomo la autofunzione

$$S(Q, t)S(q, t) = S(Q, q, t) \quad (21)$$

invece della (19), dove $S(Q, t)$ è una funzione che [come $S(\eta, q)$ nella (16)] differisce da zero solo nelle immediate vicinanze di un punto nello spazio Q e che si propaga con la velocità degli atomi nella direzione del raggio. La probabilità di un'ampiezza relativa q per qualsiasi valore Q è data dall'integrale di $S(Q, q, t)S(Q, q, t)$ su Q , cioè dalla (20). L'autofunzione (21) cambierà però in modo calcolabile nel campo magnetico e, a causa delle diverse deflessioni degli atomi negli stati superiori e inferiori dietro il campo magnetico, si sarà trasformata nella

$$S(Q, q, t) = c_2 S_2(Q, t) \psi_2(E_2, q) e^{\frac{2\pi i(E_2 t + \beta)}{h}} + \sqrt{1 - c_2^2} S_1(Q, t) \psi_1(E_1, q) e^{\frac{2\pi i E_1 t}{h}}. \quad (22)$$

$S_1(Q, t)$ e $S_2(Q, t)$ saranno funzioni dello spazio Q che differiscono da zero solo nelle immediate vicinanze di un punto; ma questo punto è diverso sia per S_1 che per S_2 . Quindi $S_1 S_2$ è zero ovunque. La probabilità di un'ampiezza relativa q e di un determinato valore Q è quindi

$$S(Q, q, t)\bar{S}(Q, q, t) = c_2^2 S_2 \bar{S}_2 \psi_2 \bar{\psi}_2 + (1 - c_2^2) S_1 \bar{S}_1 \psi_1 \bar{\psi}_1 . \quad (23)$$

Il termine periodico della (20) è scomparso e con esso la possibilità di misurare una relazione di fase. Il risultato della determinazione statistica della posizione sarà sempre lo stesso, indipendentemente dalla fase con cui la luce incidente viene predisposta. Possiamo supporre che esperimenti con la radiazione, la cui teoria non è stata ancora elaborata, forniranno gli stessi risultati sulla relazione di fase degli atomi con la luce incidente.

Infine, dovrebbe essere studiata la connessione tra l'equazione (2) $E_1 t_1 \sim h$ con un complesso di problemi, che Ehrenfest e altri ricercatori¹⁾ hanno discusso in due importanti articoli utilizzando il principio di corrispondenza di Bohr²⁾. Ehrenfest e Tolman parlano di "quantizzazione debole" quando un movimento periodico quantizzato è interrotto da salti quantistici o altre perturbazioni in intervalli di tempo che non possono essere considerati molto lunghi in relazione al periodo del sistema. In questo caso, non dovrebbero apparire solo i valori energetici quantistici esatti, ma anche valori energetici con una probabilità a priori qualitativamente specificabile inferiore che non si discostano troppo dai valori quantistici. Nella meccanica quantistica, questo comportamento deve essere interpretato come segue: poiché l'energia viene realmente cambiata da perturbazioni esterne o dai salti quantistici, ogni misurazione di energia, se deve essere univoca, deve avvenire in un tempo tra le due perturbazioni. Questo fornisce un limite superiore per t_1 nel senso del § 1. Misuriamo il valore energetico E_0 di uno stato quantizzato anche solo con un'approssimazione $E_1 \sim \frac{h}{t_1}$. La questione se il sistema assuma tali valori di energia E , che si discostano da E_0 , "realmente" con il peso statistico inferiore corrispondente, o se la loro determinazione sperimentale sia dovuta solo all'inesattezza della misurazione, in linea di principio non ha alcun senso. Se t_1 è minore del periodo del sistema, non ha più senso parlare di stati stazionari discreti o di valori di energia discreti.

In un contesto simile Ehrenfest e Breit (l.c.) sottolineano il seguente paradosso: un rotatore, che vorremmo pensare come una ruota dentata, sia dotato di un dispositivo che inverte il senso di rotazione dopo f giri della ruota. La ruota dentata fa presa per esempio in un'asta dentata, che per sua parte si può spostare in linea retta tra due ceppi; dopo un certo numero di giri i ceppi forzano l'asta e quindi la ruota a fare inversione. Il reale periodo T del sistema è lungo rispetto al tempo di giro t della ruota; i livelli di energia discreti giacciono corrispondentemente densi, e tanto più densi quanto maggiore è T . Poiché, dal punto di vista di una teoria quantistica coerente, tutti gli stati stazionari hanno lo stesso peso statistico, per

¹P. Ehrenfest und G. Breit, ZS. f. Phys. **9**, 207, 1922; e P. Ehrenfest und R. C. Tolman, Phys. Rev. **24**, 287, 1924; vedere anche la discussione in N. Bohr, Postulati di base della teoria quantistica l. c.

²Il signor W. Pauli mi ha fatto notare questo collegamento.

un T sufficientemente grande praticamente tutti i valori di energia si verificheranno con la stessa frequenza — contrariamente a quanto ci si aspetterebbe per il rotatore. Prendendo in considerazione i nostri punti di vista, tale paradosso viene per prima cosa ancora inasprito. Al fine cioè di determinare se il sistema assumerà valori energetici discreti appartenenti al rotatore puro una volta o con particolare frequenza, o se accetterà tutti i valori possibili con la stessa probabilità (cioè valori che corrispondono ai piccoli livelli di energia $\frac{h}{T}$), è sufficiente un tempo t_1 piccolo rispetto a T (ma $\gg t$); ossia, sebbene il lungo periodo per tali misurazioni non sia affatto efficace, apparentemente possono verificarsi tutti i possibili valori di energia. Siamo dell'opinione che tali esperimenti per determinare l'energia totale del sistema produrrebbero realmente anche tutti i possibili valori di energia con uguale probabilità; e il responsabile di questo risultato non è il grande periodo T , ma l'asta che si sposta linearmente. Sebbene il sistema si trovi in uno stato, la cui energia corrisponde alla quantizzazione del rotatore, può essere facilmente trasformato da forze esterne che agiscono sull'asta, in uno stato che non corrisponde alla quantizzazione del rotatore ¹). Il sistema accoppiato: rotatore e asta, mostra proprietà di periodicità completamente diverse rispetto al rotatore. La soluzione al paradosso sta anzi in quanto segue: se vogliamo misurare l'energia del solo rotatore, dobbiamo prima allentare l'accoppiamento tra il rotatore e l'asta. Nella teoria classica, se la massa dell'asta è sufficientemente piccola, l'allentamento dell'accoppiamento potrebbe verificarsi senza alcun cambiamento di energia, motivo per cui l'energia dell'intero sistema potrebbe essere equiparata a quella del rotatore (se la massa dell'asta è piccola). Nella meccanica quantistica, l'energia di interazione tra asta e ruota è almeno dello stesso ordine di grandezza del livello di energia del rotatore (anche quando la massa dell'asta è piccola, rimane un'elevata un'energia del punto zero per l'interazione elastica tra ruota e asta!); quando si allenta l'accoppiamento, si generano individualmente i valori di energia quantistica per l'asta e la ruota. Finché possiamo misurare solo i valori di energia del rotatore, troviamo sempre i valori di energia quantistica con l'approssimazione data dall'esperimento. Anche se la massa dell'asta va a zero, l'energia del sistema accoppiato differisce tuttavia dall'energia del rotatore; l'energia del sistema accoppiato può assumere tutti i valori possibili (ammessi dalla quantizzazione T) con uguale probabilità.

La cinematica e la meccanica teorica quantistica sono ampiamente diverse dall'abituale. L'applicazione dei concetti cinematici e meccanici classici non può tuttavia essere dedotta dalle nostre leggi di logica né dall'esperienza; a questa conclusione ci dà ragione la relazione (1) $p_1 q_1 \sim h$. Poiché quantità di moto, posizione, energia, ecc. di un elettrone sono concetti esattamente definiti, non c'è bisogno di preoccuparsi del fatto che l'equazione fondamentale (1) contenga solo un enunciato qualitativo. Inoltre, poiché possiamo pensare qualitativamente alle conseguenze sperimentali della teoria in tutti i casi semplici, la meccanica quantistica non dovrà

¹Secondo Ehrenfest e Breit, questo non può accadere, o solo molto raramente, per forze che agiscono sulla ruota

più essere considerata come confusa e astratta.²⁾ Naturalmente, ammettendo ciò, si vorrebbe anche poter dedurre le leggi quantitative della meccanica quantistica direttamente dalle basi descrittive, cioè essenzialmente dalla relazione (1).

Ecco perché Jordan ha provato ad interpretare l'equazione

$$S(q, q') = \int S(q, q')S(q', q'')dq' \quad (24)$$

come una relazione di probabilità. Tuttavia, non possiamo condividere questa interpretazione (§ 2). Piuttosto, crediamo che le leggi quantitative possano per il momento essere comprese da basi osservabili solo secondo il principio della massima semplicità possibile. Se, per esempio, la coordinata X dell'elettrone non è più un "numero", come può essere dedotto sperimentalmente secondo l'equazione (1), allora l'ipotesi più semplice possibile [che non contraddice la (1)] è quindi che questa coordinata X sia un membro diagonale di una matrice, i cui membri non diagonali si esprimono in un'approssimazione o per trasformazioni in altri modi (si veda per esempio il § 4). L'affermazione che, per esempio, la velocità nella direzione X "in realtà" non è un numero, ma un membro diagonale di una matrice, forse non è più astratta e meno chiara dell'affermazione che l'intensità del campo elettrico "in realtà" è la componente temporale di un tensore antisimmetrico dello spaziotempo. L'espressione "in realtà" sarà qui tanto più o tanto meno valida e ingiustificata quanto in una qualsiasi descrizione matematica dei processi naturali. Non appena si ammette che tutte le quantità teoriche quantistiche sono "in realtà" matrici, le leggi quantitative si conseguono senza difficoltà.

Se si presume che l'interpretazione della meccanica quantistica qui tentata sia corretta in punti essenziali, allora è consentito trattare in poche parole le sue principali conseguenze. Non abbiamo assunto che la teoria quantistica, in contrasto con la teoria classica, sia una teoria essenzialmente statistica, nel senso che solo conclusioni statistiche potessero essere tratte a partire da dati esattamente forniti. Sono contrari a tali ipotesi anche i ben noti esperimenti di Geiger e Bothe. Piuttosto, in tutti i casi in cui nella teoria classica ci sono relazioni tra quantità che sono realmente tutte esattamente misurabili, le relazioni esatte corrispondenti si applicano anche nella teoria quantistica (legge della quantità di moto e dell'energia). Ma nella formulazione categorica della legge causale: "se conosciamo esattamente il presente, possiamo calcolare il futuro", non è l'apodosi, ma la premessa che è sbagliata. In linea di principio, non possiamo conoscere il presente in tutte le sue parti determinanti. Pertanto ogni percezione è una scelta tra una moltitudine di possibilità e una limitazione di ciò che è possibile in futuro. Poiché il carattere statistico della teoria quantistica è così strettamente legato all'inesattezza di tutte le percezioni, si potrebbe essere indotti a supporre che dietro il mondo statistico percepito si nasconda ancora un mondo "reale" in cui vale la legge causale. Ma tali

²Schrödinger descrive la meccanica quantistica come teoria formale di spaventosa, certo ripugnante confusione e astrazione. Certamente non si può sopravvalutare il valore della penetrazione matematica (e fino a quel punto chiara) delle leggi della meccanica quantistica raggiunta dalla teoria di Schrödinger. Tuttavia, a mio avviso, nelle questioni fisiche fondamentali, la popolare chiarezza della meccanica ondulatoria ha deviato dal percorso rettilineo che era stato tracciato dal lavoro di Einstein e de Broglie da un lato, e dal lavoro di Bohr e dalla meccanica quantistica all'altro.

speculazioni ci sembrano, lo sottolineiamo esplicitamente, sterili e inutili. La fisica dovrebbe solo descrivere formalmente la connessione tra le percezioni. Piuttosto, si può caratterizzare molto meglio il vero stato di cose come segue: poiché tutti gli esperimenti sono soggetti alle leggi della meccanica quantistica e quindi all'equazione (1), l'invalidità della legge causale è definitivamente determinata dalla meccanica quantistica.

Aggiunta alla correzione della bozza. Dopo il completamento del presente lavoro, le indagini più recenti di Bohr hanno portato a considerazioni che consentono un approfondimento e affinamento sostanziale dell'analisi delle relazioni quantomeccaniche esplorate in questo lavoro. A questo proposito Bohr mi ha fatto notare che avevo trascurato punti essenziali in alcune delle discussioni di questo lavoro. Soprattutto, l'incertezza nell'osservazione non si basa esclusivamente sul verificarsi di discontinuità, ma è direttamente correlata all'esigenza di rendere conto alle diverse esperienze che si esprimono nella teoria corpuscolare da un lato e nella teoria ondulatoria dall'altro. Ad esempio, quando si utilizza un microscopio a raggi gamma, bisogna tenere conto della divergenza necessaria del fascio; solo questo ha come conseguenza che quando si osserva la posizione dell'elettrone, la direzione del rinvolo Compton è nota solo con un'approssimazione che poi porta alla relazione (1). Inoltre, non è sufficientemente sottolineato che la semplice teoria dell'effetto Compton è strettamente applicabile solo agli elettroni liberi. Come ha chiarito il Prof. Bohr, la cautela che ne deriva nell'applicare la relazione di incertezza è, tra le altre cose, essenziale per una discussione esauriente della transizione dalla micro alla macro-meccanica. Infine, le considerazioni sulla fluorescenza di risonanza non sono del tutto corrette, perché il rapporto tra la fase della luce e il movimento degli elettroni non è così semplice come ipotizzato. Devo i miei più sentiti ringraziamenti al Prof. Bohr per il fatto che ho potuto conoscere e discutere all'origine le sue più recenti indagini sopra menzionate, e che appariranno presto in un lavoro sulla struttura concettuale della teoria quantistica.

Istituto di Fisica Teorica dell'Università di Copenaghen.
