

# Sobre o conteúdo observável da cinemática e da mecânica quântica\*

de **W. Heisenberg** em Copenhagen

Com 2 ilustrações. (Recebido no dia 23 de março 1927.)

## Sommario

No presente trabalho, em primeiro lugar, são enunciadas as definições exatas das palavras: posição, velocidade, energia, etc. (por exemplo do elétron), que também são válidas na mecânica quântica, e é mostrado que quantidades canonicamente conjugadas podem ser determinadas simultaneamente apenas com uma imprecisão intrínseca (§ 1). Essa imprecisão é a verdadeira razão pela qual as relações estatísticas aparecem na mecânica quântica. É possível dar uma formulação matemática dessa imprecisão por meio da teoria de Dirac-Jordan. (§ 2). A partir dos princípios assim obtidos, mostra-se como os processos macroscópicos podem ser compreendidos por meio da mecânica quântica (§ 3). Para a explicação da teoria, são discutidos alguns experimentos ideais particulares (§ 4).

Acreditamos que entendemos claramente uma teoria física quando podemos descobrir qualitativamente, em todos os casos simples, as consequências experimentais dessa teoria, e quando, ao mesmo tempo, reconhecemos que o uso da teoria nunca contém contradições internas. Por exemplo, acreditamos que entendemos bem a ideia de Einstein de um espaço tridimensional fechado porque para nós as consequências experimentais dessa ideia podem ser pensadas sem contradições. É claro que essas consequências estão em contradição com nossos conceitos de espaço-tempo habituais e observáveis. Podemos, no entanto, nos convencer de que a possibilidade de usar essa noção usual do espaço-tempo em espaços muito grandes não pode ser deduzida por nossas leis lógicas ou experiência. A interpretação observacional da mecânica quântica até agora ainda está cheia de contradições internas que alimentam a luta de opiniões sobre a teoria do descontínuo e do contínuo, corpúsculos e ondas. A partir daqui, pode-se concluir que uma interpretação da mecânica quântica não é possível por meio dos conceitos habituais da cinemática e da mecânica. A mecânica quântica havia precisamente surgido em uma tentativa de romper com os conceitos habituais da cinemática e colocar em seu lugar relações entre números concretos, dados experimentais. Como isso parece ter sido bem sucedido, o esquema matemático da mecânica quântica não requer qualquer

---

\*Título original: *Über den anschaulichen Inhalt der quantenteoretischen Kinematik und Mechanik*. Publicado em: *Zeitschrift für Physik* **43** (1927): 172–198. Traduzido por Oliver F. Piattella e por Giuseppina Fiorino.

revisão. Ainda menos necessária será uma revisão da geometria do espaço-tempo para pequenos espaços e tempos, dado que podemos aproximar as leis da mecânica quântica para as clássicas através da escolha de massas suficientemente pesadas, mesmo quando trata-se de espaços e tempos tão pequeno. No entanto, que uma revisão dos conceitos cinemáticos e mecânicos seja necessária parece seguir imediatamente das equações fundamentais da mecânica quântica. Quando uma certa massa  $m$  é dada, em nossa maneira usual de ver, tem certo significado facilmente compreensível falar sobre a posição e a velocidade do centro de gravidade dessa massa  $m$ . Na mecânica quântica, porém, deve haver uma relação  $\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \frac{h}{2\pi i}$  entre massa, posição e velocidade. Portanto, temos uma boa razão para suspeitar do uso acrítico dessas palavras “posição” e “velocidade”. Se for admitido que para processos em espaços e tempos muito pequenos descontinuidades de algum tipo são típicas, então um fracasso dos conceitos “posição” e “velocidade” também é imediatamente plausível: se pense, por exemplo, no movimento unidimensional de um ponto maciço; será possível assim rastrear, em uma teoria contínua, uma curva  $x(t)$  para a trajetória da partícula (mais exatamente: do seu centro de gravidade) (Fig. 1), a tangente dando a velocidade em qualquer momento. Em uma teoria do descontínuo, por outro lado, aparecerá em vez desta curva, por exemplo, uma série de pontos de distanciamento finito (Fig. 2). Neste caso, obviamente é sem sentido falar da velocidade em uma determinada posição porque a velocidade só pode ser definida através de dois pontos e porque, como segue fazendo o raciocínio inverso, a cada ponto correspondem duas velocidades diferentes.

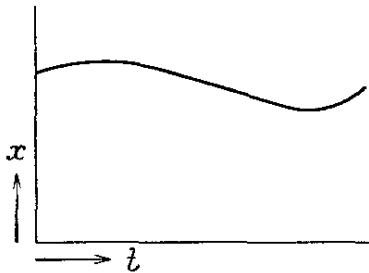


Fig. 1.

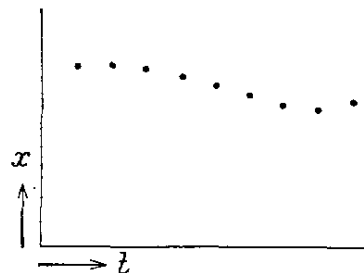


Fig. 2.

A partir daqui, surge a questão se não for possível, através de uma análise mais precisa desses conceitos cinemáticos e mecânicos, resolver as contradições que até agora existem na interpretação observacional da mecânica quântica e chegar a uma clara compreensão das relações quantomecânicas.<sup>1)</sup>

<sup>1</sup>O presente trabalho surgiu a partir dos esforços e desejos aos quais já muito antes do nascimento da mecânica quântica, outros pesquisadores deram uma expressão clara. Lembro-me aqui especialmente dos trabalhos de Bohr sobre os postulados fundamentais da teoria quântica (por exemplo ZS. f. Phys. **13**, 117, 1923) e as discussões de Einstein sobre a relação entre o campo de onda e quantos de luz. Em tempos mais recentes, os problemas aqui mencionados foram discutidos e as questões que surgem foram parcialmente respondidas da maneira mais clara possível por W. Pauli (Teoria quântica, Handb. d. Phys., Bd. XXIII, doravante referido como l.c.); com a mecânica quântica, apenas pouco mudou na formulação de Pauli desses problemas. Também é uma alegria excepcional para mim agradecer ao Sr. W. Pauli aqui pelos muitos estímulos que recebi das discussões orais e escritas com ele, e que deram um contributo essencial para este trabalho.

## § 1. Os conceitos: posição, trajetória, velocidade, energia.

Para seguir o comportamento quantomecânico de algum objeto, deve-se conhecer a massa desse objeto e a força da interação mútua com algum campo e outros objetos. Somente dessa forma a função hamiltoniana do sistema mecânico quântico pode ser dada. [As seguintes reflexões devem geralmente se relacionar com a mecânica quântica não relativística, uma vez que as leis da eletrodinâmica quântica ainda são conhecidas de forma incompleta.]<sup>1</sup>). Sobre a “forma” do objeto qualquer outra afirmação não é necessária, pois é mais conveniente designar a totalidade dessas forças de interação mútua com a palavra forma.

Quando queremos esclarecer o que se entende por “posição do objeto”, por exemplo do elétron (relativo a um dado sistema de referência), é necessário estabelecer certos experimentos com a ajuda dos quais se pretende medir a “posição do elétron”; em caso contrário, esta palavra não faz sentido. Não faltam esses experimentos, que em princípio permitem determinar a “posição do elétron” até com precisão arbitrária, por exemplo: o elétron é iluminado e observado ao microscópio. A maior precisão alcançável para a determinação da posição é essencialmente dada aqui pelo comprimento de onda da luz usada. Mas então, em princípio, podemos construir um microscópio de raios  $\Gamma$  e com ele determinar a posição com uma precisão tão grande quanto desejarmos. No entanto, uma circunstância concomitante nesta determinação é essencial: o efeito Compton. Qualquer observação do feixe de luz que vem do elétron pressupõe um efeito fotoelétrico (no olho, na placa fotográfica, na fotocélula), que portanto pode ser também interpretado como um quanto de luz que encontra um elétron, é refletido ou desviado por este e, então, desviado novamente pelas lentes do microscópio, causando o efeito luminoso. No momento de determinar a posição, ou seja, no momento em que o quanto de luz é desviado pelo elétron, este muda seu impulso de forma descontínua. Essa mudança é tanto maior quanto menor for o comprimento de onda da luz usada, ou seja, quanto mais exata for a determinação da posição. Quando a posição do elétron é conhecida, seu impulso só pode ser conhecido a menos das quantidades que correspondem a essa mudança descontínua; portanto, quanto mais exatamente a posição é determinada, menos exatamente o impulso é conhecido e vice-versa; bem aqui, vemos uma demonstração direta e observável da relação  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$ . Seja  $q_1$  a exatidão com que o valor  $q$  é conhecido ( $q_1$  é por exemplo o erro médio de  $q$ ), então aqui o comprimento de onda da luz, e seja  $p_1$  a exatidão com que o valor  $p$  é determinável, ou seja aqui a mudança descontínua de  $p$  devido ao efeito Compton, então  $p_1$  e  $q_1$ , de acordo com as fórmulas elementares do efeito Compton, encontram-se na relação

$$p_1 q_1 \sim h . \quad (1)$$

Que a relação (1) esteja em conexão matemática direta com a relação de comutação  $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$ , será mostrado mais tarde. Observe-se aqui que a equação (1) é a

---

<sup>1</sup>No entanto, grandes progressos foram alcançados recentemente nesta área, graças aos trabalhos de P. Dirac e [Proc. Roy. Soc. (A) **114**, 243, 1927] e às pesquisas que serão publicadas no futuro.

expressão exata daqueles fatos que anteriormente tentava-se descrever através da divisão do espaço das fases em células de tamanho  $h$ .

Outros experimentos também podem ser realizados para determinar a posição do elétron, por exemplo tentativas de colisão. Uma medição exata da posição requer colisões com partículas muito rápidas, pois com elétrons lentos os fenômenos de desvio, que de acordo com Einstein são consequência das ondas de de Broglie (ver por exemplo o efeito Ramsauer), impedem uma determinação exata da posição. Para uma medição exata da posição, o impulso do elétron, portanto, varia novamente em modo descontínuo e uma estimativa simples da exatidão com as fórmulas das ondas de de Broglie fornece de novo a relação (1).

Com esta discussão, o conceito de “posição do elétron” parece ser definido de forma bastante clara e deixem-me agora acrescentar mais uma palavra sobre o “tamanho” do elétron. Se duas partículas muito rápidas encontram o elétron uma após a outra em um intervalo de tempo muito curto  $\Delta t$ , então as posições do elétron determinadas pelas duas partículas estão muito próximas uma da outra a uma distância  $\Delta l$ . A partir das leis que são observadas para os raios  $\alpha$  concluímos que  $\Delta l$  pode ser reduzido até tamanho da ordem de  $10^{-12}$  cm, somente se  $\Delta t$  for escolhido pequeno o suficiente e as partículas são rápidas o suficiente. É nesse sentido que dizemos que o elétron é um corpúsculo cujo raio não é maior do que  $10^{-12}$  cm.

Analisemos agora ao conceito de “trajetória do elétron”. Com trajetória, entendemos uma série de pontos no espaço (em um dado sistema de referência), que o elétron ocupa um após o outro. Como já sabemos o que se entende por “posição num determinado momento”, não surgem aqui novas dificuldades. No entanto, é fácil ver que, por exemplo, a expressão frequentemente usada: a “trajetória  $1S$  do elétron no átomo de hidrogênio”, do nosso ponto de vista não faz sentido. Para medir essa “trajetória”  $1S$  o átomo deveria de fato ser iluminado com luz cujo comprimento de onda é em qualquer caso consideravelmente menor que  $10^{-8}$  cm. De tal luz, no entanto, apenas um quanto é suficiente para desalojar completamente o elétron de sua “trajetória” (de modo que sempre e apenas um único ponto de tal trajetória pode ser definido), e a palavra “trajetória” não tem, portanto, nenhum significado razoável aqui. Isso já pode ser deduzido simplesmente a partir das possibilidades experimentais, sem o conhecimento de novas teorias.

Por outro lado, a medição de posição planejada pode ser realizada para muitos átomos no estado  $1S$ . (Átomos em um dado estado “estacionário” podem ser isolados, por exemplo, do experimento Stern-Gerlach). Deve haver, portanto, para um determinado estado, por exemplo  $1S$ , do átomo, uma função de probabilidade para a posição do elétron, que corresponde ao valor médio de todas as fases da trajetória clássica e que pode ser determinada através da medida com precisão arbitrária. De acordo com Born<sup>1)</sup> esta função é dada por  $\psi_{1S}(q)\bar{\psi}_{1S}(q)$ , onde

---

<sup>1)</sup>O significado estatístico das ondas de de Broglie foi formulado pela primeira vez por A. Einstein (Sitzungber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1925, S. 3). Este elemento estatístico na mecânica quântica, portanto, desempenha um papel essencial em M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, Mecânica Quântica II (ZS. f. Phys. **35**, 557, 1926), cf. Cap. 4, § 3, e P. Jordan (ZS. f. Phys. **37**, 376, 1926); isto é analisado matematicamente em um trabalho fundamental de M. Born (ZS. f. Phys. **38**, 803, 1926) e usado para a interpretação de fenômenos de colisão. A motivação da abordagem probabilística a partir da teoria da transformação de matrizes encontra-se nos

$\psi_{1S}$  representa a função de onda de Schrödinger correspondente ao estado  $1S$ . Com Dirac<sup>1)</sup> e Jordan<sup>1)</sup> gostaria de dizer, considerando outras generalizações: a probabilidade é dada por  $S(1S, q)\bar{S}(1S, q)$ , onde  $S(1S, q)$  representa aquela coluna da matriz de transformação  $S(E, q)$  de  $E$  a  $q$ , que pertence a  $E = E_{1S}$  ( $E =$  energia).

Dado que na teoria quântica para um determinado estado, por exemplo  $1S$ , apenas a função de probabilidade da posição do elétron pode ser dada, podemos ver nela, com Born e Jordan, um traço estatístico característico da teoria quântica, em oposição à teoria clássica. Mas também podemos dizer, com Dirac, se quiserem, que a estatística é introduzida por nossos experimentos. De fato, pode-se evidentemente dar também na teoria clássica apenas a probabilidade de uma determinada posição do elétron, desde que não conheçamos as fases do átomo. Na verdade, a diferença entre a mecânica clássica e quântica consiste no seguinte: classicamente, podemos sempre pensar nas fases como determinadas por experimentos anteriores. Na realidade, entretanto, isso é impossível, porque todo experimento para determinar a fase destrói ou altera o átomo. Em um determinado “estado” estacionário do átomo, as fases são, em princípio, indeterminadas, o que pode ser visto como uma explicação direta das equações conhecidas

$$\mathbf{E}t - t\mathbf{E} = \frac{h}{2\pi i} \quad \text{ou} \quad \mathbf{J}w - w\mathbf{J} = \frac{h}{2\pi i}$$

( $\mathbf{J}$  = variável de ação,  $w$  = variável de ângulo).

A palavra “velocidade” de um objeto pode ser facilmente definida por meio de medições, se for um movimento não sujeito a forças. Por exemplo, é possível iluminar o objeto com luz vermelha e através do efeito Doppler da luz difusa obter a velocidade da partícula. A determinação da velocidade torna-se mais precisa quanto maior o comprimento de onda da luz utilizada, já que a variação da velocidade da partícula por quanto de luz devida ao efeito Compton torna-se muito menor. A determinação da posição torna-se correspondentemente imprecisa, pois corresponde à equação (1). Se a velocidade do elétron no átomo fosse medida em um determinado instante, então, por exemplo, a carga nuclear e as forças dos elétrons restantes teriam que desaparecer repentinamente neste instante, de modo que a partir daí o movimento ocorresse sem forças e a determinação acima será feita. Mais uma vez, podemos nos convencer, como acima, de que uma função  $p(t)$  para um determinado estado do átomo, por exemplo  $1S$ , não pode ser definida. Por outro lado, há novamente uma função de probabilidade de  $p$  neste estado, que de acordo com Dirac e Jordan tem o valor  $S(1S, p)\bar{S}(1S, p)$ .  $S(1S, p)$  indica novamente aquela coluna da matriz de transformação  $S(E, p)$ , de  $\mathbf{E}$  para  $\mathbf{p}$ , que pertence a  $E = E_{1S}$ .

Por último, chama-se novamente a atenção para os experimentos que permitem medir a energia ou a variável de ação; tais experimentos são especialmente importantes, pois somente com a ajuda deles podemos definir o que queremos dizer quando falamos de variação descontínua de energia e de  $J$ . Os experimentos de

---

trabalhos: W. Heisenberg (ZS. f. Phys. **40**, 501, 1926), P. Jordan (ibid. **40**, 661, 1926), W. Pauli (Ann. in ZS. f. Phys. **41**, 81, 1927), P. Dirac (Proc. Roy. Soc. (A) **113**, 621, 1926), P. Jordan (ZS. f. Phys. **40**, 809, 1926). De forma geral, o lado estatístico da mecânica quântica é discutido em P. Jordan (Naturwiss. **15**, 105, 1927) e M. Born (Naturwiss. **15**, 238, 1927).

colisão de Franck-Hertz tornam possível relacionar a medição da energia do átomo com a medição da energia de um elétron em movimento retilíneo, graças ao teorema da energia na teoria quântica. Esta medição pode ser realizada, em princípio, com precisão arbitrária apenas se se renuncia a determinar ao mesmo tempo a posição do elétron, ou seja, da fase (compare-se acima da determinação de  $p$ ) correspondendo à relação  $\mathbf{Et} - t\mathbf{E} = \frac{h}{2\pi i}$ . O experimento Stern-Gerlach permite a determinação do momento magnético ou de um momento elétrico médio do átomo, portanto a medição de grandezas que dependem apenas da variável de ação  $J$ . As fases permanecem, em princípio, indeterminadas. Assim como não faz sentido falar da frequência de uma onda de luz em um determinado instante, não é possível falar da energia do átomo em um determinado momento. Isso corresponde ao fato, no experimento de Stern-Gerlach, de que a precisão da medição de energia se torna menor quanto menor o intervalo de tempo em que o átomo está sob a influência da força de desvio.<sup>1)</sup> Um limite superior para a força desviante é, portanto, dado pelo fato de que a energia potencial dessa força desviante dentro do feixe de radiação só pode variar em quantidades que são consideravelmente menores do que as diferenças de energia dos estados estacionários, se uma determinação de energia dos estados estacionários seja possível. Seja  $E_1$  uma quantidade de energia que satisfaça esta condição ( $E_1$  ao mesmo tempo dá a precisão dessa medida de energia), então  $E_1/d$  é, portanto, o valor máximo da força desviante, onde  $d$  representa a largura do feixe de radiação (mensurável através da extensão da tela usada). O desvio angular do raio atômico é, portanto,  $\frac{E_1 t_1}{dp}$ , onde  $t_1$  indica o intervalo de tempo em que o átomo está sob a influência da força desviante,  $p$  o impulso do átomo em a direção do raio. Para que uma medição seja possível, esse desvio deve ser pelo menos da mesma ordem de magnitude que o espalhamento natural do feixe, que ocorre na tela devido à difração. O desvio angular por difração é da ordem de  $\lambda/d$ , se  $\lambda$  representa o comprimento de onda de de Broglie, então

$$\frac{\lambda}{d} \sim \frac{E_1 t_1}{dp} \quad \text{ou, como} \quad \lambda = \frac{h}{p},$$

$$E_1 t_1 \sim h. \quad (2)$$

Esta equação corresponde à equação (1) e mostra como uma determinação exata de energia só pode ser alcançada com uma imprecisão correspondente no tempo.

## § 2. A teoria de Dirac-Jordan.

Os resultados da seção anterior poderiam ser resumidos e generalizados na seguinte afirmação: todos os conceitos que são usados na teoria clássica para a descrição de um sistema mecânico podem ser definidos exatamente também para processos atômicos, analogamente aos conceitos clássicos. Os experimentos que atendem a essa definição, porém, carregam em si, de acordo com a experiência pura, uma indeterminação, quando lhes solicitamos a determinação simultânea de duas grandezas canonicamente conjugadas. O grau dessa indeterminação é dado pela relação

<sup>1</sup>Em relação a este aspecto, veja-se W. Pauli, l. c. p. 61.

(1) (estendida a quaisquer variáveis canonicamente conjugadas). É evidente aqui comparar a teoria quântica com a teoria da relatividade especial. De acordo com a teoria relativística, a palavra “simultâneo” não pode ser definida de outra forma senão por meio de experimentos, nos quais a velocidade de propagação da luz tem essencialmente a ver com isso. Se houvesse uma definição “mais restritiva” de simultaneidade, então se houvesse, por exemplo, sinais que se propagam com velocidade infinita, então a teoria da relatividade seria impossível. No entanto, uma vez que tais sinais não existem, e uma vez que de fato a velocidade da luz entra na definição de simultaneidade, há espaço para o postulado da constância da velocidade da luz, de modo que este postulado não está em contradição com o uso sensato das palavras “posição, velocidade, tempo”. O mesmo se aplica à definição do conceito: “posição e velocidade do elétron” na teoria quântica. Todos os experimentos que podemos usar para definir essas palavras contêm necessariamente a imprecisão dada pela equação (1), mesmo que nos permitam definir exatamente os conceitos únicos  $p$  e  $q$ . Se houvessem experimentos que tornassem possível determinar simultaneamente uma determinação “mais precisa” de  $p$  e  $q$  do que a equação (1) mostra, a mecânica quântica seria assim impossível. Esta imprecisão definida pela equação (1) cria, portanto, espaço para a validade das relações que encontram sua expressão incisiva na relação de comutação da mecânica quântica

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} ;$$

esta equação é possível sem que o significado físico das quantidades  $p$  e  $q$  tenha que ser modificado.

Para aqueles fenômenos físicos cuja formulação quântica ainda é desconhecida (por exemplo, a eletrodinâmica), a equação (1) representa uma restrição que pode ser útil para a descoberta de uma nova lei. A equação (1) para a mecânica quântica pode ser deduzida por meio de uma ligeira generalização a partir da formulação de Dirac-Jordan. Quando estabelecemos, para o valor dado  $\eta$  de algum parâmetro, a posição  $q$  do elétron como  $q'$  com uma aproximação  $q_1$ , podemos expressar este fato através de uma amplitude de probabilidade  $S(\eta, q)$ , que é consideravelmente diferente de zero apenas em uma região de tamanho aproximadamente  $q_1$  em torno de  $q'$ . Mais especificamente, é possível estabelecer

$$S(\eta, q) \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{h} p'(q-q')} , \text{ portanto } S\bar{S} \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{q_1^2}} . \quad (3)$$

Para a amplitude de probabilidade em relação a  $p$  vale:

$$S(\eta, p) = \int S(\eta, q)S(q, p)dq . \quad (4)$$

De acordo com Jordan, pode-se dizer que

$$S(q, p) = e^{\frac{2\pi i pq}{h}} . \quad (5)$$

Portanto, de acordo com a (4),  $S(\eta, p)$  será consideravelmente diferente de zero apenas para valores de  $p$  para os quais  $\frac{2\pi(p-p')q_1}{h}$  não seja essencialmente maior

que 1. Em particular, no caso (3), é válido o seguinte:

$$S(\eta, p) \text{ prop } \int e^{\frac{2\pi i(p-p')q}{h} - \frac{(q'-q)^2}{2q_1^2}} dq ,$$

que implica

$$S(\eta, p) \text{ prop } e^{-\frac{(p-p')^2}{2p_1^2} + \frac{2\pi i}{h} q'(p-p')} , \text{ portanto } S\bar{S} \text{ prop } e^{-\frac{(p-p')^2}{p_1^2}} ,$$

onde

$$p_1 q_1 = \frac{h}{2\pi} . \quad (6)$$

A hipótese (3) para  $S(\eta, q)$  corresponde portanto ao fato experimental, para qual o valor  $p'$  para  $p$  e  $q'$  para  $q$  foi medido [com limite de precisão (6)].

De forma puramente matemática, é característico da formulação de Dirac-Jordan da mecânica quântica que as relações entre  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{E}$ , etc. podem ser escritas como equações entre matrizes muito gerais, na forma em que qualquer quantidade predeterminada da teoria quântica aparece como uma matriz diagonal. A possibilidade de tal forma de escrever convence se interpretarmos visualmente as matrizes como tensores (por exemplo, o momento de inércia) no espaço multidimensional, entre os quais existem relações matemáticas. É possível colocar os eixos do sistema de coordenadas em que essas relações matemáticas são expressas sempre ao longo dos eixos principais de um desses tensores. Além disso, a relação matemática entre dois tensores  $A$  e  $B$  sempre pode ser caracterizada através das fórmulas de transformação, que transferem um sistema de coordenadas orientado em relação ao eixo principal de  $A$  para outro orientado de acordo com o eixo principal de  $B$ .

A última formulação corresponde à teoria de Schrödinger. Como uma formulação da mecânica quântica verdadeiramente “invariante”, independente de todos os sistemas de coordenadas, consideraremos a abordagem de Dirac dos dígitos  $q$ . Quando queremos derivar um resultado físico a partir desse modelo matemático, devemos atribuir números às grandezas quânticas teóricas, portanto às matrizes (ou aos “tensores” em um espaço multidimensional). Isso deve ser entendido desta forma, que naquele espaço multidimensional uma direção arbitrária é predeterminada (ou seja, é estabelecida pelo tipo de experimento usado) e pergunta-se qual é o “valor” da matriz (por exemplo do momento de inércia) nesta direção predeterminada. Esta questão, porém, tem um significado único apenas quando a direção predeterminada coincide com a direção de um dos eixos principais daquela matriz; neste caso, há uma resposta exata para a pergunta feita. Mas se a direção predeterminada desvia-se, mesmo que ligeiramente de um dos eixos principais da matriz, então pode-se falar do “valor” da matriz na direção predeterminada com algum erro provável, com alguma imprecisão da inclinação relativa. Pode-se também dizer: a cada quantidade teórica quântica ou matriz da teoria quântica pode ser atribuído um número que indica seu “valor” com um certo erro provável; o erro probabilístico depende do sistema de coordenadas; para cada grandeza teórica quântica, existe um sistema de coordenadas no qual o erro probabilístico desaparece. Portanto, um determinado experimento nunca pode fornecer informações exatas sobre todas as grandezas teóricas quânticas, pelo contrário, ele divide as grandezas físicas em



grandezas “conhecidas” e “desconhecidas” de maneira característica para o experimento (ou seja: grandezas conhecidas mais ou menos exatamente). Os resultados de dois experimentos podem, portanto, ser deduzidos exatamente um do outro apenas se ambos os experimentos dividirem da mesma forma as grandezas físicas em “conhecidas” e “desconhecidas” (ou seja, quando os tensores naquele espaço multidimensional usado várias vezes como título indicativo de que eles são “considerados” em ambos os experimentos da mesma direção). Se dois experimentos usam subdivisões diferentes em grandezas “conhecidas” e “desconhecidas”, então a relação dos resultados desses experimentos só pode ser dada corretamente de maneira estatística.

Para uma discussão mais detalhada dessa conexão estatística, se execute um experimento ideal. Uma radiação atômica do tipo Stern-Gerlach é enviada inicialmente através de um campo  $F_1$ , que é tão fortemente não homogêneo na direção da radiação que evidentemente causa muitas transições através do “efeito de agitação”. Depois disso, a radiação atômica viaja livre por um certo tempo, mas a uma certa distância de  $F_1$  começa um segundo campo  $F_2$ , similarmente não homogêneo como  $F_1$ . Entre  $F_1$  e  $F_2$  e além de  $F_2$  seja possível medir o número de átomos nos vários estados estacionários por meio de um campo magnético adequadamente aplicado. As forças de radiação dos átomos sejam desprezadas. Se sabemos que um átomo estava no estado de energia  $E_n$  antes de passar para  $F_1$ , podemos assim afirmar este fato experimental, atribuindo uma função de onda ao átomo – por exemplo no espaço  $p$  – com energia definida  $E_n$  e fase indefinida  $\beta_n$

$$S(E_n, p) = \psi(E_n, p)e^{-\frac{2\pi i E_n(\alpha + \beta_n)}{h}}.$$

Depois de percorrer o campo  $F_1$ , esta função será alterada para<sup>1)</sup>

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} \psi(E_m, p) e^{-\frac{2\pi i E_m(\alpha + \beta_m)}{h}} \quad (7)$$

Sejam aqui os  $\beta_m$  de alguma forma determinados arbitrariamente, para que os  $c_{nm}$  sejam unicamente determinados por  $F_1$ . A matriz  $c_{nm}$  transforma os valores da energia antes de passar por  $F_1$  naqueles depois de ter passado por  $F_1$ . Se, em seguida, realizarmos uma determinação dos estados estacionários em  $F_1$ , por exemplo por meio de um campo magnético não homogêneo, encontraremos com probabilidade  $c_{nm}\bar{c}_{nm}$ , que o átomo passou do estado  $n$  para o estado  $m$ . Se determinarmos experimentalmente que o átomo acabou de transicionar para o estado  $m$ , então teremos que atribuí-lhe, para o cálculo de tudo o que segue, não a função  $\sum_m c_{nm} S_m$ , mas precisamente a função  $S_m$ , com uma fase indefinida; através da determinação experimental “estado  $m$ ” escolheríamos da totalidade das diferentes possibilidades ( $c_{nm}$ ) uma determinada, ou seja  $m$ , mas destruiríamos ao mesmo tempo, como será explicado mais tarde, tudo o que ainda estava contido nas grandezas  $c_{nm}$  em termos de relações de fase. Durante a passagem da radiação atômica por  $F_2$  a mesma coisa é repetida como em  $F_1$ . Sejam  $d_{nm}$  os coeficientes da matriz de transformação que transformam as energias antes de  $F_2$  naqueles depois de  $F_2$ . Se nenhuma determinação de estado for realizada entre  $F_1$  e  $F_2$ , a função própria

<sup>1</sup>Veja-se P. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **112**, 661, 1926 e M. Born, ZS. f. Phys. **40**, 167, 1926.

muda de acordo com o seguinte padrão:

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} S(E_M, p) \xrightarrow{F_2} \sum_m \sum_l c_{nm} d_{ml} S(E_l, p) . \quad (8)$$

Seja  $\sum_m c_{nm} d_{ml} = e_{nl}$ . Se o estado estacionário do átomo for determinado após  $F_2$ , o estado  $l$  será encontrado com uma probabilidade  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$ . Se, por outro lado, entre  $F_1$  e  $F_2$  for feita a determinação “estado  $m$ ”, então a probabilidade de  $l$  depois de  $F_2$  será dada por  $d_{ml} \bar{d}_{ml}$ . Repetindo todo o experimento várias vezes (e cada vez determinando o estado entre  $F_1$  e  $F_2$ ), observaremos o estado  $l$  após  $F_2$  com a relativa frequência  $Z_{nl} = \sum_m c_{nm} \bar{c}_{nm} d_{ml} \bar{d}_{ml}$ . Esta expressão não corresponde a  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$ . Jordan (l.c.), portanto, falou de “interferência de probabilidades”. Mas eu não concordo, porque os dois experimentos que levam a  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$  e  $Z_{nl}$  respectivamente, são fisicamente muito diferentes. Em um caso o átomo não sofre nenhuma perturbação entre  $F_1$  e  $F_2$ , no outro ele é perturbado pelos aparatos que permitem a determinação do estado estacionário. Esses aparatos têm como consequência que a “fase” do átomo muda em quantidades que são em princípio incontroláveis, assim como o momento muda quando a posição do elétron é determinada (ver § 1). O campo magnético que determina o estado entre  $F_1$  e  $F_2$  irá alterar os autovalores  $E$ , e durante a observação da trajetória do feixe atômico os átomos (estou pensando por exemplo nas detecções de Wilson) são estatisticamente desacelerados em de uma forma diferente e incontrolável, entre outras coisas. Isso tem como consequência que a matriz final de transformação  $e_{nl}$  (dos valores de energia antes de entrar em  $F_1$  para aqueles depois de sair de  $F_2$ ) não é mais dada por  $\sum_m c_{nm} d_{ml}$ , mas cada elemento da soma ainda tem um fator de fase desconhecido. Portanto, podemos apenas esperar que o valor médio de  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$  sobre todas essas mudanças de fase possíveis seja igual a  $Z_{nl}$ . Um cálculo simples revela que esse é o caso. — Podemos, portanto, de acordo com certas regras estatísticas, deduzir de um experimento os possíveis resultados de outro. O outro experimento mesmo seleciona a partir de uma multiplicidade de possibilidades uma muito específica e, portanto, limita as possibilidades de todos os experimentos subsequentes. Tal interpretação da equação para a matriz de transformação  $S$ , ou a equação de onda de Schrödinger, só é possível porque a soma das soluções representa novamente uma solução. Nisto vemos o profundo sentido da linearidade das equações de Schrödinger; portanto, elas podem ser entendidas apenas como equações para ondas no espaço de fase e, portanto, gostaríamos de considerar inútil qualquer tentativa de substituir essas equações por outras não lineares, por exemplo, no caso relativístico (com mais elétrons).

### § 3. A transição da micro- para macro-mecânica.

Por meio da análise realizada nas seções anteriores das palavras “posição do elétron”, “velocidade”, “energia” e assim por diante, os conceitos de cinemática e mecânica na teoria quântica me parecem suficientemente esclarecidos, de modo que uma compreensão clara dos processos macroscópicos do ponto de vista da mecânica quântica também deve ser possível. A transição da micro- para a macro-mecânica

já foi abordada por Schrödinger<sup>1</sup>), mas não acho que o raciocínio de Schrödinger toque a essência do problema, pelas seguintes razões: de acordo com Schrödinger, uma soma de oscilações próprias deveria ser capaz de produzir um pacote de ondas não muito grande em estados de alta excitação, que por sua vez executa os movimentos periódicos do “elétron” clássico com mudanças periódicas de tamanho. Por outro lado, deve-se objetar o seguinte: se o pacote de ondas tivesse as propriedades aqui descritas, a radiação emitida pelo átomo poderia ser desenvolvida em uma série de Fourier em que as frequências harmônicas são múltiplos inteiros de uma frequência fundamental. No entanto, de acordo com a mecânica quântica, as frequências das linhas espectrais emitidas pelo átomo nunca são múltiplos inteiros de uma frequência fundamental — exceto no caso especial do oscilador harmônico. O raciocínio de Schrödinger pode, portanto, ser aplicável apenas para o oscilador harmônico com o qual ele lidou; em todos os outros casos, um pacote de onda se espalha ao longo do tempo por todo o espaço próximo ao átomo. Quanto maior o estado de excitação do átomo, mais lenta ocorre a dispersão do pacote de ondas. Mas se esperar o tempo suficiente, essa dispersão ocorrerá. O argumento acima sobre a radiação emitida pelo átomo pode primeiro ser aplicado contra todos os experimentos que visam a uma transição direta da mecânica quântica para a mecânica clássica para elevados números quânticos. Por essa razão, no passado, tentou-se evitar o argumento referindo-se à difusão natural da radiação em estado estacionário; sem dúvida erroneamente porque, em primeiro lugar, essa saída está bloqueada no átomo de hidrogênio devido à baixa radiação presente em condições de alta excitação e, em segundo lugar, a transição da mecânica quântica para a mecânica clássica também deve ser compreensível sem depender da eletrodinâmica. Bohr<sup>1</sup>) já apontou várias vezes antes essas dificuldades conhecidas, que impedem uma conexão direta entre a teoria quântica e a teoria clássica. Nós as temos explicadas novamente em detalhes porque parecem ter sido recentemente esquecidas.

Eu acredito que a origem da “órbita” clássica pode ser sinteticamente formulada da seguinte maneira: a “órbita” surge apenas quando a observamos: por exemplo, um átomo é dado no milésimo estado excitado. As dimensões da órbita já são relativamente grandes aqui, de modo que é suficiente, no sentido de § 1, determinar a posição do elétron com luz de comprimento de onda relativamente grande. Se a determinação da posição não for muito imprecisa, o recuo Compton terá a consequência de que o átomo ficará em um estado após a colisão entre, digamos, 950 e 1050; ao mesmo tempo, o momento do elétron pode ser deduzido do efeito Doppler com uma precisão que pode ser determinada a partir da (1). O fato experimental assim dado pode ser caracterizado por um pacote de ondas — ou melhor, um pacote de probabilidade — no espaço  $q$  de tamanho dado pelo comprimento de onda da luz utilizada, essencialmente composto pela suas funções próprias compreendidas entre 950 e 1050, e por um pacote correspondente no espaço  $p$ . Após algum tempo, uma nova determinação de posição é executada com a mesma precisão. O resultado só pode ser estabelecido estatisticamente, de acordo com § 2, e como posições possíveis consideramos todos aquelas dentro do pacote de ondas

<sup>1</sup>E. Schrödinger, *Naturwiss.* **14**, 664, 1926.

<sup>1</sup>N. Bohr, *Postulados básicos da teoria quântica*, l. c.

agora dispersos, com uma probabilidade calculável. Isso não seria diferente na teoria clássica, porque aqui também o resultado da determinação da segunda posição só poderia ser dado estatisticamente devido à incerteza da primeira determinação; as órbitas do sistema da teoria clássica também se espalhariam de maneira semelhante ao pacote de ondas. No entanto, as mesmas leis estatísticas são diferentes na mecânica quântica e na teoria clássica. A segunda determinação da posição seleciona um certo “ $q$ ” da totalidade de possibilidades e limita as possibilidades para todas as determinações subsequentes. Após a segunda determinação da posição, os resultados das medições subsequentes só podem ser calculados atribuindo um pacote de ondas de tamanho “menor” de  $\lambda$  (comprimento de onda da luz usada para observação) ao elétron. Cada determinação da posição, portanto, reduz o pacote de ondas ao seu tamanho original  $\lambda$ . Os “valores” das variáveis  $p$  e  $q$  são conhecidos com um certo grau de precisão ao longo de todos os experimentos. Que os valores de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  satisfaçam as equações clássicas de movimento dentro desses limites de precisão pode ser deduzido diretamente das leis da mecânica quântica:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (9)$$

Como mencionado, a órbita só pode ser calculada estatisticamente a partir das condições iniciais, o que pode ser visto como uma consequência da incerteza fundamental sobre as condições iniciais. As leis estatísticas são diferentes para a mecânica quântica e a teoria clássica; sob certas condições, isso pode levar a diferenças macroscópicas aproximadas entre a teoria clássica e a quântica. Antes de discutir um exemplo, gostaria de mostrar como para um sistema mecânico simples, o movimento sem força de uma massa pontual, a transição para a teoria clássica discutida acima deve ser formulada matematicamente. As equações de movimento (no caso de um movimento unidimensional) são as seguintes

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2; \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{m}\mathbf{p}; \quad \dot{\mathbf{p}} = 0. \quad (10)$$

Uma vez que o tempo pode ser tratado como um parâmetro (como um “número  $c$ ”) se não houver forças externas dependentes do tempo, a solução para essas equações é:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{m}\mathbf{p}_0 t + \mathbf{q}_0; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \quad (11)$$

onde  $\mathbf{p}_0$  e  $\mathbf{q}_0$  representam o momento e a posição no tempo  $t = 0$ . No tempo  $t = 0$  [vejam-se as equações de (3) a (6)] o valor  $q_0 = q'$  é medido com a aproximação  $q_1$ , e  $p_0 = p'$  com a aproximação  $p_1$ . Para deduzir os “valores” de  $\mathbf{q}$  no tempo  $t$  a partir dos “valores” de  $\mathbf{p}_0$  e  $\mathbf{q}_0$ , de acordo com Dirac e Jordan, é necessário encontrar aquela função de transformação que transforma todas as matrizes nas quais  $\mathbf{q}_0$  aparece como uma matriz diagonal naquelas em que  $\mathbf{q}$  aparece como matriz diagonal.  $\mathbf{p}_0$  pode ser substituído pelo operador  $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0}$  no esquema de matriz onde  $\mathbf{q}_0$  aparece como uma matriz diagonal. De acordo com Dirac [vide a equação (11)] portanto, vale como amplitude de transformação procurada  $S(q_0; q)$  a equação diferencial:

$$\left\{ \frac{t}{m} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0} + q_0 \right\} S(q_0, q) = q S(q_0, q) \quad (12)$$

$$\frac{t}{m} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S}{\partial q_0} = (q_0 - q)S(q_0, q)$$

$$S(q_0, q) = \text{const.} \cdot e^{\frac{2\pi m \int (q-q_0) dq_0}{\hbar t}} \quad (13)$$

$S\bar{S}$  é portanto independente de  $q_0$ , ou seja, se no tempo  $t = 0$   $q_0$  é exatamente conhecido, então, em qualquer tempo  $t > 0$  todos os valores de  $q$  são igualmente prováveis, ou seja, a probabilidade de que  $q$  está em uma faixa finita é praticamente zero. Isso é bastante óbvio pois a determinação exata de  $q_0$  leva a um recuo Compton infinitamente grande. O mesmo obviamente se aplicaria a qualquer sistema mecânico arbitrário. Mas se  $q_0$  fosse conhecido apenas com uma precisão de  $q_1$  no tempo  $t = 0$  e  $p_0$  com uma precisão de  $p_1$  [cf. a equação (3)],

$$S(\eta, q_0) = \text{const.} \cdot e^{-\frac{(q_0 - q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{\hbar} p'(q_0 - q')},$$

então a função de probabilidade para  $q$  deve ser calculada de acordo com a fórmula

$$S(\eta, q) = \int S(\eta, q_0) S(q_0, q) dq_0.$$

Obtém-se

$$S(\eta, q) = \text{const.} \int e^{\frac{2\pi i m}{\hbar} \left[ q_0 \left( q - \frac{t}{m} p' \right) - \frac{q_0^2}{2} \right] - \frac{(q' - q_0)^2}{2q_1^2}} dq_0. \quad (14)$$

Ao introduzir a abreviatura

$$\beta = \frac{\hbar t}{2\pi m q_1^2}, \quad (15)$$

o expoente em (14) torna-se

$$-\frac{1}{2q_1^2} \left\{ q_0^2 \left( 1 + \frac{i}{\beta} \right) - 2q_0 \left( q' + \frac{i}{\beta} \left( q - \frac{t}{m} p' \right) \right) + q'^2 \right\}.$$

O termo com  $q'^2$  pode ser incluído na constante (fator independente de  $q$ ) e a integração resulta em

$$S(\eta, q) = \text{const.} \cdot e^{\frac{1}{2q_1^2} \frac{[q' + \frac{i}{\beta}(q - \frac{t}{m} p')]^2}{1 + \frac{i}{\beta}}} = \text{const.} \cdot e^{-\frac{(q - \frac{t}{m} p' - i\beta q')^2 (1 - \frac{i}{\beta})}{2q_1^2 (1 + \beta^2)}}. \quad (16)$$

Segue-se

$$S(\eta, q) \bar{S}(\eta, q) = \text{const.} \cdot e^{-\frac{(q - \frac{t}{m} p' - q')^2}{q_1^2 (1 + \beta^2)}}. \quad (17)$$

O elétron é, portanto, encontrado no ponto  $\frac{t}{m} p' + q'$  no tempo  $t$  com uma precisão  $q_1 \sqrt{1 + \beta^2}$ . O “pacote de ondas” ou melhor, “pacote de probabilidade” é aumentado pelo fator  $\sqrt{1 + \beta^2}$ . De acordo com a (15),  $\beta$  é proporcional ao tempo  $t$ , inversamente proporcional à massa — isso é imediatamente plausível — e inversamente proporcional a  $q_1^2$ . A precisão excessiva em  $q_0$  resulta em uma imprecisão excessiva em  $p_0$  e, portanto, leva também a uma grande imprecisão em  $q$ . O parâmetro  $\eta$ , que apresentamos acima por motivos formais, pode ser omitido aqui em todas as fórmulas, pois não entra no cálculo.

Como exemplo do fato de que a diferença entre as leis estatísticas clássicas e as teóricas quânticas podem eventualmente levar a diferenças macroscópicas aproximadas entre os resultados das duas teorias, será brevemente discutida a reflexão de um fluxo de elétrons em uma rede. Se a constante de rede é da ordem de magnitude do comprimento de onda de de Broglie dos elétrons, a reflexão ocorre em certas direções espaciais discretas, como a reflexão da luz em uma rede. A teoria clássica aqui oferece algo mais macroscopicamente. No entanto, não podemos encontrar de forma alguma uma contradição com a teoria clássica na órbita de um único elétron. Poderíamos fazer isso se pudéssemos, por exemplo, direcionar o elétron para um determinado ponto em uma linha da grade e então descobrir que a reflexão ali não é clássica. Mas se quisermos determinar a posição do elétron com tanta precisão que possamos dizer em qual ponto de uma linha da grade ele atinge, o elétron obtém, devido a essa determinação de posição, uma grande velocidade para a qual o comprimento de onda de de Broglie do elétron torna-se muito menor que agora a reflexão pode e realmente ocorrerá nesta aproximação na direção classicamente prescrita, sem contradizer as leis da teoria quântica.

## § 4. Discussão de alguns experimentos ideais particulares.

De acordo com a interpretação descritiva da teoria quântica tentada aqui, os tempos de transições, igualmente concretos aos “saltos quânticos”, devem ser verificados por meio de medições, como as energias em estados estacionários. A precisão com que tal instante de tempo pode ser determinado é dada por  $\frac{h}{\Delta E}$  de acordo com a equação (2)<sup>1</sup>), se  $\Delta E$  indica a mudança na energia durante o salto quântico. Vamos pensar no seguinte experimento: um átomo no tempo  $t = 0$  no estado 2 passa, irradiando, para o estado fundamental 1. De maneira semelhante à equação (7), pode, portanto, ser atribuída ao átomo a autofunção

$$S(t, p) = e^{-\alpha t} \psi(E_2, p) e^{-\frac{2\pi i E_2 t}{h}} + \sqrt{1 - e^{-2\alpha t}} \psi(E_1, p) e^{-\frac{2\pi i E_1 t}{h}} \quad (18)$$

se assumirmos que a atenuação da radiação é expressa em um fator da forma  $e^{-\alpha t}$  na autofunção (a dependência real talvez não seja tão simples). Este átomo é enviado através de um campo magnético não homogêneo para medir sua energia, como é comum no experimento de Stern-Gerlach, mas certamente o campo não homogêneo teria que seguir o raio atômico por uma longa distância. A aceleração instantânea é medida, por exemplo, dividindo toda a distância que o raio atômico percorre no campo magnético em pequenas seções, ao final de cada uma das quais é determinada a deflexão do raio. Dependendo da velocidade do raio atômico, à divisão em segmentos corresponde para o átomo uma divisão em pequenos intervalos de tempo  $\Delta t$ . De acordo com (2) de § 1, ao intervalo  $\Delta t$  corresponde uma aproximação na energia de  $\frac{h}{\Delta t}$ . A probabilidade de medir uma determinada energia  $E$  pode ser deduzida diretamente a partir de  $S(p, E)$  e, portanto, é calculada

---

<sup>1</sup>Veja-se W. Pauli, l. c. S. 12

no intervalo de  $n\Delta t$  para  $(n+1)\Delta t$  por:

$$S(p, E)_{n\Delta t \rightarrow (n+1)\Delta t} = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} S(p, t) e^{\frac{2\pi i E t}{h}} dt .$$

Se no tempo  $(n+1)\Delta t$  for feita a declaração: “estado 2”, então a autofunção (18) não deve mais ser atribuída ao átomo para o resto, mas outra, que emerge de (18), se se substituirmos  $t$  com  $t - (n+1)\Delta t$ . Se, em vez disso, determinarmos: “estado 1”, a partir desse momento devemos atribuir ao átomo a autofunção:

$$\psi(E_1, p) e^{-\frac{2\pi i E_1 t}{h}} .$$

Portanto, veremos primeiro em uma série de intervalos  $\Delta t$ : “estado 2”, então continuamente “estado 1”. Para que uma distinção entre os dois estados ainda seja possível,  $\Delta t$  não deve ser colocado abaixo de  $h$ . O momento da transição pode então ser determinado com esta aproximação. Quando falarmos sobre mudança descontínua de energia, queremos dizer um experimento do tipo que acabamos de descrever, inteiramente de acordo com a velha concepção da teoria quântica fundada por Planck, Einstein e Bohr. Visto que, em princípio, tal experimento é viável, um acordo sobre seu resultado deve ser possível.

Nos postulados básicos da teoria quântica de Bohr, a energia de um átomo, como os valores das variáveis de ação  $J$ , tem a vantagem sobre outras quantidades determináveis (posição do elétron, etc.) que seu valor numérico pode sempre ser dado. Essa posição preferencial, que a energia assume em relação a outras grandezas da mecânica quântica, deve-se, entretanto, apenas ao fato de que em sistemas fechados ela representa uma integral das equações de movimento (para a matriz energética vale  $\mathbf{E} = \text{constante}$ ); no caso de sistemas não fechados, entretanto, a energia não será distinguida de qualquer outra grandeza da mecânica quântica. Em particular, será possível especificar experimentos nos quais é possível medir exatamente as fases  $w$  do átomo, em que, entretanto, a energia permanece em princípio indeterminada, correspondendo a uma relação  $\mathbf{J}w - w\mathbf{J} = \frac{h}{2\pi i}$  o  $J_1 w_1 \sim h$ . Por exemplo, a ressonância de fluorescência representa tal experimento. Ao irradiar um átomo com uma frequência natural, digamos  $\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{h}$ , o átomo assim vibra em fase com a radiação externa, portanto, em princípio, não faz sentido perguntar em que estado  $E_1$  o  $E_2$  o átomo vibra. A relação de fase entre o átomo e a radiação externa pode ser determinada, por exemplo, através da relação de fase de muitos átomos entre si (experimentos de Woods). Se preferirem se abster de experimentos com radiação, a relação de fase também pode ser medida de forma a executar determinações da posição exata, no sentido do § 1, do elétron em tempos diferentes da fase da luz incidente (em muitos átomos). A “função de onda”

$$S(q, t) = c_2 \psi_2(E_2, q) e^{-\frac{2\pi i (E_2 t + \beta)}{h}} + \sqrt{1 - c_2^2} \psi_1(E_1, q) e^{-\frac{2\pi i E_1 t}{h}} \quad (19)$$

pode ser atribuída a um único átomo; aqui  $c_2$  depende da intensidade e  $\beta$  da fase da luz irradiada. Portanto, a probabilidade de uma certa posição  $q$  é

$$S(q, t) \bar{S}(q, t) = c_2^2 \psi_2 \bar{\psi}_2 + (1 - c_2^2) \psi_1 \bar{\psi}_1 + c_2 \sqrt{1 - c_2^2} \left( \psi_2 \bar{\psi}_1 e^{-\frac{2\pi i}{h} [(E_2 - E_1)t + \beta]} + \bar{\psi}_2 \psi_1 e^{+\frac{2\pi i}{h} [(E_2 - E_1)t + \beta]} \right) . \quad (20)$$

O termo periódico em (20) é experimentalmente separável do termo não periódico, uma vez que as determinações de posição podem ser feitas para diferentes fases da luz irradiada.

Em um experimento ideal bem conhecido fornecido por Bohr, os átomos de um feixe atômico de Stern-Gerlach são primeiro excitados em uma determinada posição até a ressonância de fluorescência pela luz irradiada. Depois de uma distância eles atravessam um campo magnético não homogêneo; a radiação emitida pelos átomos pode ser observada na frente e atrás do campo magnético. Antes dos átomos entrarem no campo magnético, há uma fluorescência de ressonância normal, ou seja, semelhante à teoria da dispersão, deve-se supor que todos os átomos emitem ondas esféricas em fase com a luz incidente. Esta última visão está inicialmente em desacordo com o que resulta de uma aplicação aproximada da teoria quântica da luz ou das regras básicas da teoria quântica: uma vez que poderia ser concluído a partir dela que apenas alguns átomos são trazidos para o “estado superior” absorvendo um quanto de luz, a radiação de ressonância inteira viria então de alguns centros excitados com radiação intensa. Portanto, é óbvio primeiro dizer: a concepção quântica da luz só pode ser usada aqui para o equilíbrio de energia-momento, “na realidade” todos os átomos no estado inferior emitem ondas esféricas fracas e coerentes. No entanto, depois que os átomos passaram pelo campo magnético, dificilmente podem haver dúvidas de que o feixe atômico se dividiu em dois feixes, um dos quais corresponde aos átomos no estado superior e o outro aos átomos no estado inferior. Agora, se os átomos no estado inferior irradiam, isso seria uma séria violação da lei da energia, porque toda a energia de excitação está no raio atômico com os átomos no estado superior. Pelo contrário, não pode haver dúvida de que por trás do campo magnético apenas o raio atômico com os estados superiores emite luz — e, além disso, luz incoerente — pelos poucos átomos que irradiam intensamente no estado superior. Como Bohr mostrou, este experimento torna particularmente claro que cuidado é frequentemente necessário ao usar o termo “estado estacionário”. De acordo com a teoria quântica desenvolvida aqui, uma discussão do experimento de Bohr pode ser conduzida sem dificuldade. No campo de radiação externa as fases dos átomos são determinadas, então não faz sentido falar sobre a energia do átomo. Mesmo após o átomo ter deixado o campo de radiação, não pode ser dito que estava em um determinado estado estacionário, a menos que se inquirir sobre as propriedades de coerência da radiação. Mas experimentos podem ser feitos para descobrir em que estado o átomo se encontra; o resultado deste experimento só pode ser declarado estatisticamente. Tal experimento é conduzido realmente pelo campo magnético não homogêneo. Atrás do campo magnético as energias dos átomos são determinadas, portanto as fases são indeterminadas. A radiação ocorre aqui de forma inconsistente e apenas a partir dos átomos no estado superior. O campo magnético determina as energias e destrói a relação de fase. O experimento ideal de Bohr é uma explicação muito bonita do fato de que a energia do átomo “na verdade” não é um número, mas uma matriz. A lei da conservação é válida para a matriz de energia e, portanto, também para o valor da energia com a precisão com que são medidos respectivamente. O cancelamento da relação de fase pode ser obtido com o seguinte cálculo: sejam  $Q$  as coordenadas do centro de gravidade do átomo, então atribuiremos a autofunção ao



átomo

$$S(Q, t)S(q, t) = S(Q, q, t) \quad (21)$$

em lugar de (19), onde  $S(Q, t)$  é uma função que [como  $S(\eta, q)$  na (16)] difere de zero apenas na vizinhança imediata de um ponto no espaço  $Q$  e que se propaga com a velocidade dos átomos na direção do raio. A probabilidade de uma amplitude relativa  $q$  para qualquer valor  $Q$  é dada pela integral de  $S(Q, q, t)S(Q, q, t)$  em  $Q$ , ou seja, pela (20). No entanto, a autofunção (21) mudará de forma calculável no campo magnético e, devido às diferentes deflexões dos átomos nos estados superior e inferior atrás do campo magnético, terá se transformado no

$$S(Q, q, t) = c_2 S_2(Q, t) \psi_2(E_2, q) e^{\frac{2\pi i(E_2 t + \beta)}{h}} + \sqrt{1 - c_2^2} S_1(Q, t) \psi_1(E_1, q) e^{\frac{2\pi i E_1 t}{h}}. \quad (22)$$

$S_1(Q, t)$  e  $S_2(Q, t)$  serão funções do espaço  $Q$  que diferem de zero apenas na vizinhança imediata de um ponto; mas este ponto é diferente para  $S_1$  e  $S_2$ . Portanto,  $S_1 S_2$  é zero em todos os lugares. A probabilidade de uma amplitude relativa  $q$  e de um determinado valor  $Q$  é, portanto,

$$S(Q, q, t) \bar{S}(Q, q, t) = c_2^2 S_2 \bar{S}_2 \psi_2 \bar{\psi}_2 + (1 - c_2^2) S_1 \bar{S}_1 \psi_1 \bar{\psi}_1. \quad (23)$$

O termo periódico da (20) desapareceu e com ele a possibilidade de medir uma relação de fase. O resultado da determinação estatística da posição será sempre o mesmo, independentemente da fase em que a luz incidente é configurada. Podemos supor que experimentos com radiação, cuja teoria ainda não foi elaborada, darão os mesmos resultados sobre a relação de fase dos átomos com a luz incidente.

Finalmente, deveria ser estudada a conexão entre a equação (2)  $E_1 t_1 \sim h$  com um complexo de problemas, que Ehrenfest e outros pesquisadores<sup>1)</sup> discutiram em dois artigos importantes usando o princípio de correspondência de Bohr<sup>2)</sup>. Ehrenfest e Tolman falam de “quantização fraca” quando um movimento periódico quantizado é interrompido por saltos quânticos ou outras perturbações em intervalos de tempo que não podem ser considerados muito longos em relação ao período do sistema. Nesse caso, não apenas os valores exatos de energia quântica deveriam aparecer, mas também os valores de energia com uma probabilidade a priori qualitativamente especificável mais baixa que não diferem muito dos valores quânticos. Na mecânica quântica, esse comportamento deve ser interpretado da seguinte forma: uma vez que a energia é realmente alterada por perturbações externas ou saltos quânticos, cada medição de energia, se for unívoca, deve ocorrer em um tempo entre as duas perturbações. Isso fornece um limite superior para  $t_1$  no sentido de § 1. Medimos o valor de energia  $E_0$  de um estado quantizado mesmo com apenas uma aproximação  $E_1 \sim \frac{h}{t_1}$ . A questão de se o sistema assume tais valores de energia  $E$ , que diferem de  $E_0$ , “realmente” com o peso estatístico correspondente inferior, ou se sua determinação experimental é devida apenas à imprecisão da medição, em princípio não faz nenhum sentido. Se  $t_1$  é menor que o período do sistema, não

<sup>1)</sup>P. Ehrenfest und G. Breit, ZS. f. Phys. **9**, 207, 1922; e P. Ehrenfest und R. C. Tolman, Phys. Rev. **24**, 287, 1924; vejam também a discussão em N. Bohr, Postulados básicos da teoria quântica l. c.

<sup>2)</sup>O Sr. W. Pauli apontou essa conexão para mim.

faz mais sentido falar sobre estados estacionários discretos ou valores de energia discretos.

Em um contexto semelhante Ehrenfest e Breit (l.c.) enfatizam o seguinte paradoxo: um rotador, que gostaríamos de pensar como uma roda dentada, é equipado com um dispositivo que inverte o sentido de rotação após  $f$  voltas da roda. A roda dentada se agarra, por exemplo, a uma haste dentada, que por sua vez pode ser movida em linha reta entre duas sapatas; após um certo número de voltas, as sapatas forçam a haste e, portanto, a roda a inverter. A roda dentada se agarra, por exemplo, a uma haste dentada, que por sua vez pode ser movida em linha reta entre duas sapatas; após um certo número de voltas, as sapatas forçam a haste e, portanto, a roda a inverter. O período real  $T$  do sistema é longo em comparação com o tempo de volta  $t$  da roda; os níveis de energia discretos são correspondentemente densos e, quanto mais densos, maior é  $T$ . Uma vez que, do ponto de vista de uma teoria quântica coerente, todos os estados estacionários têm o mesmo peso estatístico, para um  $T$  suficientemente grande, basicamente todos os valores de energia ocorrerão com a mesma frequência — ao contrário do que se esperaria para o rotador. Levando em consideração nossos pontos de vista, este paradoxo é antes de mais nada exacerbado. A fim de determinar se o sistema assumirá valores de energia discretos pertencentes ao rotador puro uma vez ou com frequência específica, ou se aceitará todos os valores possíveis com a mesma probabilidade (ou seja, valores que correspondem à pequenos níveis de energia  $\frac{h}{T}$ ), é suficiente um pequeno tempo  $t_1$  em comparação com  $T$  (mas  $\gg t$ ); ou seja, embora o longo período para tais medições não seja eficaz, aparentemente podem ocorrer todos os valores de energia possíveis. Somos da opinião que tais experimentos para determinar a energia total do sistema produziram realmente todos os valores de energia possíveis com igual probabilidade; e não é o grande período  $T$  que é responsável por esse resultado, mas a haste de movimento linear. Embora o sistema esteja em um estado, cuja energia corresponde à quantização do rotador, ele pode ser facilmente transformado por forças externas atuando sobre a haste, em um estado que não corresponde à quantização do rotador.<sup>1</sup>). O sistema acoplado: rotador e haste, exhibe propriedades de periodicidade completamente diferentes do rotador. Na verdade, a solução para o paradoxo está no seguinte: se quisermos medir apenas a energia do rotador, devemos primeiro afrouxar o acoplamento entre o rotador e a haste. Na teoria clássica, se a massa da haste for pequena o suficiente, o afrouxamento do acoplamento pode ocorrer sem qualquer alteração na energia, razão pela qual a energia do sistema todo pode ser igualada à do rotador (se a massa da haste é pequena). Na mecânica quântica, a energia de interação entre a haste e a roda é pelo menos da mesma ordem de magnitude que o nível de energia do rotador (mesmo quando a massa da haste é pequena, uma alta energia de ponto zero permanece para a interação elástica entre a roda e a haste!); quando o acoplamento é afrouxado, os valores de energia quântica para a haste e a roda são gerados individualmente. Enquanto podemos medir apenas os valores de energia do rotador, encontramos sempre os valores de energia quântica com a aproximação dada pelo experimento. Mesmo se a massa da haste chegar a zero, a energia do

---

<sup>1</sup>De acordo com Ehrenfest e Breit, isso não pode acontecer, ou apenas muito raramente, devido às forças que atuam na roda

sistema acoplado ainda difere da energia do rotador; a energia do sistema acoplado pode assumir todos os valores possíveis (permitidos pela quantização  $T$ ) com igual probabilidade.

---

A cinemática e a mecânica teórica quântica são amplamente diferentes do habitual. A aplicação de conceitos clássicos de cinemática e mecânica, entretanto, não pode ser deduzida de nossas leis da lógica nem da experiência; a relação (1)  $p_1 q_1 \sim h$  confirma esta conclusão. Uma vez que momento, posição, energia, etc. de um elétron são conceitos definidos exatamente, não há necessidade de se preocupar que a equação fundamental (1) contenha apenas uma declaração qualitativa. Além disso, uma vez que podemos pensar qualitativamente sobre as consequências experimentais da teoria em todos os casos simples, a mecânica quântica não terá mais de ser considerada confusa e abstrata.<sup>2)</sup> Claro, admitindo isso, também gostaria-se de poder deduzir as leis quantitativas da mecânica quântica diretamente das bases descritivas, ou seja, essencialmente a partir da relação (1).

É por isso que Jordan tentou interpretar a equação

$$S(q, q') = \int S(q, q') S(q', q'') dq' \quad (24)$$

como uma relação de probabilidade. No entanto, não podemos concordar com esta interpretação (§ 2). Pelo contrário, acreditamos que as leis quantitativas podem, no momento, ser compreendidas a partir de bases observáveis apenas de acordo com o princípio da maior simplicidade possível. Se, por exemplo, a coordenada  $X$  do elétron não é mais um “número”, como pode ser deduzido experimentalmente de acordo com a equação (1), então a hipótese mais simples possível [que não contradiz o (1)] é, portanto, que esta coordenada  $X$  seja um membro diagonal de uma matriz, cujos membros não diagonais são expressos em uma aproximação ou por transformações de outras maneiras (veja-se por exemplo o § 4). A afirmação de que, por exemplo, a velocidade na direção  $X$  “realmente” não é um número, mas um membro diagonal de uma matriz, talvez não seja mais abstrata e menos clara do que a afirmação de que a intensidade do campo elétrico “realmente” é o componente de tempo de um tensor antissimétrico do espaço-tempo. A expressão “realmente” será aqui muito mais ou muito menos válida e injustificada do que em qualquer descrição matemática de processos naturais. Assim que seja admitido que todas as quantidades teóricas quânticas são “realmente”, as leis quantitativas são alcançadas sem dificuldade.

Se for assumido que a interpretação da mecânica quântica tentada aqui está correta em pontos essenciais, então é permitido tratar em poucas palavras suas principais consequências. Não presumimos que a teoria quântica, em contraste

---

<sup>2</sup>Schrödinger descreve a mecânica quântica como uma teoria formal de confusão e abstração assustadoras e certamente repugnantes. Certamente não se pode superestimar o valor da penetração matemática (e até então clara) das leis da mecânica quântica alcançada pela teoria de Schrödinger. No entanto, a meu ver, em questões físicas fundamentais, a clareza popular da mecânica ondulatória desviou-se do caminho reto que havia sido traçado pelo trabalho de Einstein e de Broglie, por um lado, e pelo trabalho de Bohr e da mecânica quântica em o outro.

com a teoria clássica, seja essencialmente uma teoria estatística, no sentido de que apenas conclusões estatísticas poderiam ser tiradas a partir de dados exatamente fornecidos. Os conhecidos experimentos de Geiger e Bothe também são contrários a essas hipóteses. Em vez disso, em todos os casos em que na teoria clássica existem relações entre quantidades que são realmente todas mensuráveis com exatidão, as relações exatas correspondentes também se aplicam na teoria quântica (momento e quantidade de energia). Mas na formulação categórica da lei causal: “se soubermos exatamente o presente, podemos calcular o futuro”, não é a apódoxe, mas a premissa que está errada. Em princípio, não podemos conhecer o presente em todas as suas partes determinantes. Portanto, toda percepção é uma escolha entre uma infinidade de possibilidades e uma limitação do que é possível no futuro. Visto que o caráter estatístico da teoria quântica está tão intimamente ligado à imprecisão de todas as percepções, poderíamos ser levados a supor que por trás do mundo estatístico percebido ainda há um mundo “real” no qual a lei causal se mantém. Mas tais especulações nos parecem, e os enfatizamos explicitamente, estéreis e inúteis. A física deve apenas descrever formalmente a conexão entre as percepções. Em vez disso, o verdadeiro estado de coisas pode ser caracterizado muito melhor da seguinte maneira: uma vez que todos os experimentos estão sujeitos às leis da mecânica quântica e, portanto, à equação (1), a invalidade da lei causal é definitivamente determinada pela mecânica quântica.

Depois da revisão do texto. Após a conclusão deste trabalho, as investigações mais recentes de Bohr levaram a considerações que permitem um aprofundamento e refinamento substancial da análise das relações da mecânica quântica exploradas neste trabalho. A esse respeito, Bohr apontou para mim que eu havia negligenciado pontos essenciais em algumas das discussões deste artigo. Acima de tudo, a incerteza na observação não se baseia exclusivamente na ocorrência de descontinuidades, mas está diretamente relacionada à necessidade de dar conta das diferentes experiências expressas na teoria corpuscular, por um lado, e na teoria ondulatória, por outro. Por exemplo, ao usar um microscópio de raios gama, a divergência necessária do feixe deve ser levada em consideração; só isso tem a consequência de que ao observar a posição do elétron, a direção do recuo Compton é conhecida apenas com uma aproximação que então leva à relação (1). Além disso, não é suficientemente enfatizado que a teoria do efeito Compton simples é estritamente aplicável apenas a elétrons livres. Como o Prof. Bohr deixou claro, a cautela resultante na aplicação da relação de incerteza é, entre outras coisas, essencial para uma discussão aprofundada da transição da micro para a macro mecânica.

Finalmente, as considerações sobre a fluorescência de ressonância não são inteiramente corretas, porque a relação entre a fase da luz e o movimento dos elétrons não é tão simples quanto se supõe. Devo meus sinceros agradecimentos ao Prof. Bohr pelo fato de poder conhecer e discutir na origem suas mais recentes investigações mencionadas acima, e que logo aparecerão em um trabalho sobre a estrutura conceitual da teoria quântica.

Instituto de Física Teórica da Universidade de Copenhague.

