

# Sobre a teoria da lei de distribuição da energia no espectro normal; por M. Planck\*

(apresentado na reunião do dia 14 de dezembro de 1900.)

(vide página 235 acima.)

---

Meus senhores! Há algumas semanas, quando tive a honra de chamar a vossa atenção para uma nova fórmula que, a meu ver, parecia apropriada para expressar a lei da distribuição de energia irradiada para todas as regiões do espectro normal<sup>1</sup>),<sup>2</sup> a minha opinião sobre a utilidade da fórmula baseara-se, como expliquei na época, não apenas na aparente concordância dos poucos números que eu pude lhes comunicar com os resultados das medições até então realizadas<sup>3</sup>), mas principalmente na simplicidade da construção da fórmula e, em particular, no fato dela fornecer uma expressão logarítmica muito simples para a dependência da entropia de um ressonador monocromático<sup>4</sup> irradiado a partir da sua energia de oscilação, cuja expressão parecia prometer a possibilidade de uma interpretação geral, pelo menos mais geral da de qualquer outra fórmula até então sugerida, com exceção da de WIEN, que, no entanto, não é confirmada pelos fatos experimentais.

Entropia pressupõe desordem, e eu acreditei de ter que enxergar esta desordem na irregularidade com a qual as oscilações do ressonador mudam suas amplitude e fase também num campo de radiação perfeitamente estacionário, na medida que se consideram intervalos de tempo grandes com relação ao período de uma oscilação, mas pequenos com relação à duração da medida. A energia constante do ressonador que oscila de maneira estacionária deve ser então entendida como um valor médio no tempo, ou, o que resulta ser a mesma coisa, como o valor médio instantâneo das energias de um grande número de ressonadores idênticos, que se

---

\*Título original: *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum*. Publicado em: *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*. 2: 237. Traduzido por Oliver F. Piattella.

<sup>1</sup>M. PLANCK, *Verhandl. der Deutschen Physikal. Gesellsch.* 2. p. 202. 1900.

<sup>2</sup>[N.d.T.] “Espectro normal” refere-se ao espectro do corpo negro, ou seja ao espectro da radiação emitida por um corpo em equilíbrio térmico capaz de absorver completamente a radiação incidente nele.

<sup>3</sup>Enquanto isso, os Srs. H. RUBENS e F. KURLBAUM deram uma confirmação direta para ondas muito longas (*Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, de 25 de outubro de 1900, p. 929).

<sup>4</sup>[N.d.T.] A matéria que constitui o corpo negro é considerada formada, em nível microscópico, por estes ressonadores, que oscilam quando excitados por uma onda eletromagnética. No caso aqui considerado eles oscilam monocromaticamente, ou seja com uma única frequência.

encontram suficientemente afastados um do outro no acima mencionado campo de radiação estacionário, de modo tal que não se influenciem reciprocamente. Como a entropia de um ressonador é ligada a como a energia è distribuída ao mesmo tempo entre muitos ressonadores, eu supus que essa tivesse que ser calculada na teoria eletromagnética da radiação através a introdução de considerações probabilísticas, cujo significado para a segunda lei fundamental da termodinâmica o Sr. L. BOLTZMANN<sup>5)</sup> tem descoberto primeiro. Esta suposição confirmou-se; tem sido para mim possível calcular de maneira dedutiva uma expressão para a entropia de um ressonador que oscila de maneira monocromática e então também para a distribuição da energia sob condição de irradiação estacionária, isto é, no espectro normal,<sup>6</sup> assim que se torna somente necessário dar uma interpretação um pouco mais elaborada da atual para a hipótese da “radiação natural” introduzida por mim na teoria eletromagnética.<sup>7</sup> Além disto, neste processo resultaram também outras relações que parecem ter um porte notável para outros campos da física e também da química.

Por outro lado, não me interessa tanto, hoje e aqui, realizar, sistematicamente em todos os detalhes, aquela dedução, que baseia-se nas leis da radiação eletromagnética, da termodinâmica e do calculo das probabilidades, quanto me interessa expor o cerne da teoria inteira do jeito mais claro possível, e isto pode acontecer da forma melhor se eu descrever aqui um processo novo e totalmente elementar, por meio do qual, sem saber nada de uma forma espectral o também de alguma teoria, com a ajuda de uma única constante da natureza pode-se calcular a distribuição de uma dada quantidade de energia nas cores individuais do espectro normal,<sup>8</sup> e então por meio de uma segunda constante da natureza pode-se também calcular numericamente a temperatura desta radiação de energia. Haverá várias partes do processo que vou apresentar que parecerão arbitrárias e complicadas, mas, como dito, não me importo aqui da prova da necessidade e da fácil e prática realizabilidade das prescrições dadas, mas somente da suas clareza e evidência para a resolução do problema.

Num meio diatérmico,<sup>9</sup> fechado por paredes refletoras e com velocidade de propagação da luz igual a  $c$ , se encontram em grande distancia uns dos outros, e em grande número, ressonadores lineares<sup>10</sup> que oscilam monocromaticamente, no específico,  $N$  com frequência  $\nu$  (por segundo),  $N'$  com frequência  $\nu'$ ,  $N''$  com frequência  $\nu''$ , etc., onde todos os  $N$  são números grandes. O sistema contém uma certa quantidade de energia: a energia total  $E_t$ , em erg, que se apresenta parte sob

<sup>5</sup>L. BOLTZMANN, namentlich Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissench. zu Wien (II) 76. p. 373. 1877.

<sup>6</sup>[N.d.T.] Aqui está também outra definição de “espectro normal”, equivalente à dada antes, ou seja: a distribuição da energia em condição de irradiação estacionária, que significa que os ressonadores e a radiação contida no corpo negro trocam energia de maneira equilibrada.

<sup>7</sup>[N.d.T.] A hipótese da “radiação natural” consiste em supor que a energia de uma certa onda eletromagnética se distribui de maneira aleatória entre as suas frequências. Essa hipótese gera uma ponte entre termodinâmica e eletromagnetismo que será usada em seguida.

<sup>8</sup>[N.d.T.] Traduzi “cores” literalmente do alemão *Farbe*. Entende-se com isso “frequências”.

<sup>9</sup>[N.d.T.] Um meio diatérmico é um condutor de calor.

<sup>10</sup>[N.d.T.] Um ressonador é dito linear quando a força restauradora é uma função linear do deslocamento da posição de equilíbrio. Em outras palavras, o ressonador é um oscilador harmônico amortecido, e forçado pela radiação eletromagnética externa.

forma de radiação que se propaga no meio, e parte nos ressonadores sob forma da própria oscilação. A questão é como, em condições estacionárias, essa energia se distribui nas oscilações dos ressonadores e nas cores individuais da radiação que se encontra no meio, e qual temperatura possui então o sistema.

Para responder a essa pergunta, consideremos em primeiro lugar somente as frequências dos ressonadores e atribuamos a eles, provisoriamente, certas energias arbitrárias, ou seja aos  $N$  ressonadores  $\nu$ , por exemplo, a energia  $E$ , aos  $N'$  ressonadores  $\nu'$  a energia  $E'$ , etc. Naturalmente a soma:

$$E + E' + E'' + \dots = E_0$$

deve ser menor de  $E_t$ . A restante energia  $E_t - E_0$  pertence então à radiação que se encontra no meio. Agora temos que definir ainda a distribuição da energia nos ressonadores individuais dentro de cada espécie, primeiramente a distribuição da energia  $E$  entre os  $N$  ressonadores com frequência  $\nu$ . Se  $E$  é enxergada como uma grandeza que pode-se subdividir indefinidamente, a distribuição é possível em infinitas maneiras. Nós, porém, consideramos  $E$  - e este é o ponto essencial de todo o cálculo - como formada por um número bem determinado de partes iguais e finitas e utilizamos para tal escopo a constante da natureza  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$  [erg  $\times$  sec].<sup>11</sup> Essa constante, multiplicada para a frequência comum  $\nu$  dos ressonadores, dá o elemento de energia  $\varepsilon$  em erg, e, por meio da divisão de  $E$  por  $\varepsilon$ , obtemos o número  $P$  dos elementos de energia que devem ser distribuídos entre os  $N$  ressonadores. Se o quociente assim calculado não é um número inteiro, então considere-se para  $P$  o número inteiro mais próximo.

Agora, é claro que a distribuição dos  $P$  elementos de energia entre os  $N$  ressonadores pode acontecer somente num número bem determinado, e finito, de modos. Chamamos cada um destes modos de “complexion”, de acordo com uma expressão usada pelo Sr. BOLTZMANN com relação a um conceito similar. Denotando os ressonadores com os dígitos 1, 2, 3, ..., escrevendo estes um ao lado do outro, numa fila, e pondo sob cada ressonador o número dos elementos de energia que cabem a ele, obtemos assim para cada complexion um símbolo da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 7 & 38 & 11 & 0 & 9 & 2 & 20 & 4 & 4 & 5 \end{array}$$

Aqui foi posto  $N = 10$  e  $P = 100$ . O valor de todos os possíveis complexion é claramente igual ao valor de todas as possíveis sequências de números que podem ser obtidas para a fila de baixo nessa maneira, com  $N$  e  $P$  fixos. Para evitar qualquer mal-entendido, note-se que dois complexion devem ser considerados como distintos também quando as correspondentes sequências de números contêm os mesmos dígitos, mas colocados em ordem diferente. Do cálculo combinatório, o valor de todos os possíveis complexion resulta em

$$\frac{N \cdot (N+1) \cdot (N+2) \cdot \dots \cdot (N+P-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$$

<sup>11</sup>[N.d.T] Eis a famosa constante de Planck. O seu valor moderno é  $6,626196(50) \times 10^{-27}$  erg s.

e com suficiente aproximação<sup>12</sup>

$$= \frac{(N + P)^{N+P}}{N^N P^P} .$$

Realizamos o mesmo cálculo para os ressonadores das espécies restantes, determinando para cada uma dessas o número dos complexion possíveis, de acordo com a energia alocada para esses ressonadores. A multiplicação de todos os valores assim obtidos dá então o número total  $\mathfrak{R}$  dos possíveis complexion para todos os ressonadores considerados em conjunto, para a distribuição de energia provisoriamente teorizada.

Assim, também a cada outra distribuição arbitrariamente pressuposta de energia  $E, E', E'', \dots$  corresponde um número  $\mathfrak{R}$  de possíveis complexion a serem determinados na maneira explicada acima. Agora, entre todas as distribuições de energia que são possíveis mantendo  $E_0 = E + E' + E'' + \dots$  constante existe uma bem precisa para a qual o número de complexion possíveis é maior do de cada outra; procuramos esta distribuição de energia, possivelmente também por tentativas; pois essa é justamente aquela que os ressonadores num campo de radiação estacionário adquirem quando possuem complexivamente a energia  $E_0$ . Então sejam todas as grandezas  $E, E', E'' \dots$  expressadas pela única grandeza  $E_0$ . Por meio da divisão de  $E$  por  $N$ , de  $E'$  por  $N'$ , etc., obtém-se então o valor estacionário da energia  $U_\nu, U'_\nu, U''_\nu, \dots$  de um ressonador individual de cada espécie e disto também a densidade espacial da energia irradiada no meio diatérmico e pertencente à região espectral  $\nu$  até  $\nu + d\nu$ :

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot U_\nu d\nu ,$$

Assim, também a energia contida no meio é determinada.

De todas as grandezas citadas aparece agora somente  $E_0$  como ainda escolhida arbitrariamente. Porém, se vê facilmente como  $E_0$  também se calcule a partir da energia total  $E_t$ . Pois se o valor escolhido de  $E_0$  resultasse num valor grande demais para  $E_t$ , correspondentemente deveria ser reduzido, e vice-versa.

Depois que assim, com a ajuda de uma constante  $h$ , calcula-se a distribuição estacionária da energia, encontra-se a correspondente temperatura em graus Celsius por meio de uma segunda constante da natureza,  $k = 1,346 \cdot 10^{-16}$  [erg:grad], através da equação:<sup>13</sup>

$$\frac{1}{\vartheta} = k \frac{d \log \mathfrak{R}_0}{dE_0} .$$

O produto  $k \log \mathfrak{R}_0$  é a entropia do sistema de ressonadores; essa é a soma das entropias de todos os ressonadores individuais.

Seria agora, de fato, muito inapropriado expor todos os cálculos mencionados, embora certamente não seria sem interesse examinar uma vez, para um caso simples, o grau de aproximação à realidade que assim se alcançaria. Um cálculo mais geral, realizado exatamente seguindo as prescrições dadas, e totalmente sem

<sup>12</sup>[N.d.T.] Essa é chamada de “aproximação de Stirling”. Vale para  $N$  e  $P$  grandes.

<sup>13</sup>[N.d.T.] Aqui aparece a famosa constante de Boltzmann  $k$ , que, apesar do nome, foi de fato introduzida por Planck. O seu valor moderno é  $1,380622(59) \times 10^{-16}$  erg K<sup>-1</sup>.

esforço, mostra muito mais diretamente que a distribuição normal de energia determinada dessa forma no meio irradiado é representada pela equação:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{k\vartheta} - 1},$$

a qual corresponde exatamente à forma espectral por mim estabelecida precedentemente:

$$E_\lambda d\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{c_2} \cdot d\lambda \cdot \frac{1}{e^{\lambda\vartheta} - 1}.$$

As variações formais são ligadas à diferença na definição de  $u_\nu$  e  $E_\lambda$ . A fórmula mais acima é então um pouco mais geral pois vale para um meio diatérmico completamente arbitrário e com velocidade de propagação da luz  $c$ . Calculei os valores numéricos dados precedentemente para  $h$  e  $k$  com essa fórmula a partir das medições de F. KURLBAUM<sup>14</sup>), e de O. LUMMER e E. PRINGSHEIM<sup>15</sup>).

Abordo agora com algumas pequenas observações a questão da necessidade da dedução apresentada. Que o elemento de energia  $\varepsilon$  teorizado para uma especie de ressonador deva ser proporcional à frequência  $\nu$ , se deduz imediatamente a partir da lei fundamental, chamada do deslocamento, de WIEN. A relação entre  $u$  e  $U$  é uma das equações fundamentais da teoria eletromagnética da radiação. No resto, toda a dedução baseia-se na única suposição que a entropia de um sistema de ressonadores com energia dada é proporcional ao logaritmo do número total de complexion que são admissíveis dada esta energia, e esta suposição pode-se, por sua vez, decompor em mais duas: 1. que a entropia do sistema num certo estado é proporcional ao logaritmo da probabilidade deste estado, e 2. que a probabilidade de cada estado é proporcional ao número dos complexion correspondentes, ou, em outras palavras, que um certo complexion é tão provável quanto qualquer outro. A proposição 1., aplicada a processos radiativos, tem sentido somente se existe uma definição da probabilidade de um estado, portanto, para a radiação de energia, desde o começo não possui-se mesmo outro meio para definir a probabilidade, se não como a própria entropia. Aqui está uma das diferenças em comparação com as relações correspondentes na teoria cinética dos gases. A proposição 2. constitui o cerne de toda a teoria apresentada; a sua prova pode ser fornecida completamente somente através da experiência. A proposição 2. pode ser interpretada também como um esclarecimento mais detalhado da hipótese da radiação natural introduzida por mim, e que eu expressei até agora somente com o fato que a energia da radiação distribui-se de maneira completamente “irregular” nas frequências parciais individuais nela contidas.<sup>16</sup>)

<sup>14</sup>F. KURLBAUM, Wied. Ann. 65. p. 759. 1898 ( $S_{100} - S_0 = 0,0731 \text{ Watt:cm}^2$ ).

<sup>15</sup>O. LUMMER e E. PRINGSHEIM, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 2. p. 176. 1900 ( $\lambda_m \vartheta = 2940 \mu \times \text{grad}$ ).

<sup>16</sup>M. PLANCK, Ann. d. Phys. 1. p. 73. 1900. Quando o Sr. WIEN, no seu Pariser Rapport (II p. 38, 1900), sobre as leis teóricas da radiação, julga então a minha teoria sobre os processos radiativos irreversíveis não satisfatória, em quanto ela não fornece a prova que a hipótese da radiação natural é a única que conduz à irreversibilidade, ele pretende um pouco demais dessa hipótese. Pois, se fosse possível provar a hipótese, ela não seria mais uma hipótese, e

Para concluir, gostaria ainda de chamar a atenção numa importante consequência da teoria desenvolvida, que torna possível ao mesmo tempo uma prova adicional da sua validade. O Sr. BOLTZMANN<sup>17)</sup> mostrou que a entropia de um gás monoatômico em equilíbrio é igual a  $\omega R \log \mathfrak{P}_0$ , onde  $\mathfrak{P}_0$  representa o número dos possíveis complexion para a distribuição de probabilidade da velocidade (a “permutabilidade”),  $R$  representa a nota constante dos gases ( $8,31.10^7$  para  $O = 16$ ),  $\omega$  representa a razão, igual para todas as substâncias, da massa de uma molécula efetiva pela massa de uma gramo-molécula.<sup>18</sup> Agora, no gás são presentes também ressonadores irradiantes, assim, de acordo com a teoria desenvolvida aqui, a entropia do sistema total é proporcional ao logaritmo do número de todos os possíveis complexion, velocidade e radiação, considerados juntos. Como, porém, segundo a teoria eletromagnética da radiação, as velocidades dos átomos são totalmente independentes da distribuição da energia irradiada, assim o número total dos complexion é simplesmente igual ao produto dos valores relativos às velocidades com os relativos à radiação, portanto a entropia global, sendo  $f$  um fator de proporcionalidade, se representa como:

$$f \log(\mathfrak{P}_0 \mathfrak{R}_0) = f \log \mathfrak{P}_0 + f \log \mathfrak{R}_0 .$$

O primeiro somando é a entropia cinética, e o segundo é a entropia de radiação. Através a comparação com a expressão anterior obtém-se daqui:

$$f = \omega R = k ,$$

ou

$$\omega = \frac{k}{R} = 1,62.10^{-24} ,$$

ou seja, uma molécula efetiva é  $1,62.10^{-24}$  vezes uma gramo-molécula, ou: um átomo de hidrogênio pesa  $1,62.10^{-24}$  g, então  $H = 1,01$ , ou: a uma gramo-molécula de cada substância correspondem  $1/\omega = 6,175.10^{23}$  moléculas efetivas. O Sr. O. E. MEYER<sup>19)</sup> calcula este valor em  $640.10^{21}$ , então está em acordo estrito.

A constante de LOSCHMIDT  $\mathfrak{N}$ , ou seja o número de moléculas de gás num 1 cm cubico a 0 graus C e na pressão de 1 atm é:

$$\mathfrak{N} = \frac{1013200}{R.273.\omega} = 2,76.10^{19} .$$

O Sr. DRUDE<sup>20)</sup> encontra  $\mathfrak{N} = 2,1.10^{19}$ .

---

nem precisaria formulá-la. Porém, então, não poderia-se deduzir algo de essencialmente novo. Do mesmo ponto de vista então, também a teoria cinética dos gases deveria ser julgada insatisfatória, pois não é fornecida ainda a prova que a hipótese atômica é a única que explique a irreversibilidade, e uma acusação correspondente caberia, mais ou menos, a todas as teorias obtidas por meios indutivos.

<sup>17</sup>L. BOLTZMANN, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (II) 76. p. 428. 1877.

<sup>18</sup>[N.d.T.] Uma gramo-molécula de uma substância tem um peso em gramas igual ao peso molecular dessa substância. Esse  $\omega$  é o recíproco do número de Avogadro.

<sup>19</sup>O. E. MEYER, A teoria cinética dos gases, 2. Aufl. p. 337. 1899.

<sup>20</sup>P. DRUDE, Ann. d. Phys. 1. p. 578. 1900.

A constante de BOLTZMANN-DRUDE  $\alpha$ , ou seja a força viva média de um átomo na temperatura absoluta de 1 é:

$$\alpha = \frac{3}{2}\omega R = \frac{3}{2}k = 2,02.10^{-16} .$$

O Sr. DRUDE<sup>21)</sup> encontra  $\alpha = 2,65.10^{-16}$ .

O quanto elementar da eletricidade  $e$ , ou seja a carga elétrica de um íon positivo monovalente, ou do elétron, é, se  $\varepsilon$  representa a nota carga de um gramo-íon monovalente:

$$e = \varepsilon\omega = 4,69.10^{-10} \text{ eletroestático} .$$

O Sr. F. RICHARZ<sup>22)</sup> encontra  $1,29.10^{-10}$ , o Sr. J. J. THOMSON<sup>23)</sup> recentemente  $6,5.10^{-10}$ .<sup>24)</sup>

Todas essas relações, se a teoria está correta, exigem uma validade não aproximada, mas absoluta. Como a exatidão dos valores calculados coincide essencialmente com a da constante de irradiação  $k$ , que é relativamente a mais incerta, tal exatidão supera de muito a de todas as determinações destas grandezas realizadas até agora. A verificação destas relações por meio de métodos mais diretos será uma tarefa adicional de pesquisa, tanto importante quanto necessária.

---

<sup>21)</sup> l. c.

<sup>22)</sup>F. RICHARZ, Wied. Ann. 52. p. 397. 1894.

<sup>23)</sup>J. J. THOMSON, Phil. Mag. (5) 46. p. 258. 1898.

<sup>24)</sup>[N.d.T] Traduzi literalmente *elektrostatisch* para “eletroestático”. Essa unidade de medida chama-se hoje “statcoulomb” (statC), ou unidade de carga eletroestática (esu). O valor mais atual da carga do elétron é  $4,80320425(10) \times 10^{-10}$  esu.