3. Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento*

por A. Einstein

Que a eletrodinâmica de Maxwell - como a mesma hoje em dia é compreendida - na sua aplicação a corpos em movimento leve a assimetrias que parecem não estar relacionadas aos fenômenos, é conhecido. Se pense, por exemplo, à interação eletrodinâmica entre um ímã e um condutor. O fenômeno observável depende aqui somente do movimento relativo entre condutor e ímã, enquanto, no entendimento comum, os dois casos, que um ou o outro destes corpos esteja em movimento, têm que ser rigorosamente separados entre si. De fato, estando o ímã em movimento e o condutor em repouso, produz-se no entorno do ímã um campo elétrico com um certo valor de energia, que, nas regiões onde se encontram partes do condutor, dá origem a uma corrente elétrica. Porém, estando o ímã em repouso e movimentando-se o condutor, não gera-se então nos arredores do ímã nenhum campo elétrico, mas gera-se, por outro lado, no condutor uma força eletromotriz, à qual não corresponde uma energia, mas que - pressuposta a igualdade do movimento relativo para os dois casos considerados - dá origem a correntes elétricas do mesmo tamanho e com a mesma direção, como as produzidas no primeiro caso pelas forças elétricas.

Exemplos do mesmo tipo, assim como as tentativas sem sucesso de detectar um movimento da Terra relativo ao "meio de propagação da luz", levam à hipótese que nenhumas características dos fenômenos correspondem ao conceito de repouso absoluto, não somente na mecânica mas também na eletrodinâmica, mas que, ainda mais, para todos os sistemas de coordenadas para os quais as equações da Mecânica valem, também as mesmas leis da eletrodinâmica e da ótica são válidas, como isso já tem sido provado para quantidades de primeira ordem. Queremos elevar esta hipótese (cujo conteúdo será chamado doravante "princípio de relatividade") para postulado e além disto incluir o postulado, aparentemente incompatível com o primeiro, que a luz propaga no espaço vazio sempre com uma determinada velocidade V, independente do estado de movimento do corpo que a emite. Estes dois postulados são suficientes para chegar numa eletrodinâmica dos corpos em movimento simples e livre de contradições com base na teoria Maxwelliana para corpos em repouso. A introdução de um "éter da luz" se revelará desnecessária, pois, segundo a interpretação a ser desenvolvida aqui, não introduz-se um "espaço de repouso absoluto" dotado de propriedades extraordinárias e nem associa-se um vetor velocidade a um ponto do espaço vazio em que processos eletromagnéticos ocorrem.

*Título original: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Publicado em: *Annalen der Physik* 17 (1905): 891–921. Traduzido por Oliver F. Piattella.

A teoria a ser desenvolvida baseia-se - como toda outra teoria da eletrodinâmica - na cinemática dos corpos rígidos, pois as afirmações de cada teoria interessam relações entre corpos rígidos (sistemas de coordenadas), relógios, e processos eletromagnéticos. A falta de consideração desta circunstância é a raiz das dificuldades com as quais a eletrodinâmica dos corpos em movimento tem que lutar no momento.

I. Parte cinemática.

§ 1. Definição da simultaneidade.

Se considere um sistema de coordenadas em que as equações da mecânica newtoniana sejam válidas. Chamamos este sistema de coordenadas de “sistema de repouso” para distingui-lo em palavras de outros sistemas de coordenadas a serem introduzidos mais à frente, e para uma sua precisa representação. Se um ponto material está em repouso com relação a este sistema de coordenadas, então a sua posição com relação a ele pode ser determinada por meio de réguas rígidas e o uso dos métodos da geometria euclidiana, e ser expressada em coordenadas cartesianas.

Se queremos descrever *o movimento* de um ponto material, damos os valores das suas coordenadas em função do tempo. Agora, é bom ficar atentos ao fato que uma tal descrição matemática possui sentido físico somente se antes tem se tornado claro o que aqui se entende com “tempo”. Temos que tomar em conta que todas as nossas asserções em que o tempo desempenha um papel, são sempre asserções sobre *eventos simultâneos*. Quando digo por exemplo: “Esse trem chega aqui às 7 horas”, isto quer dizer algo do tipo: “O ponteiro menor do meu relógio indicar o 7 e a chegada do trem são eventos simultâneos”.[1]

Poderia parecer que todas as dificuldades que a definição de “tempo” encontra possam ser superadas se, em lugar de “tempo”, uso “a posição do ponteiro pequeno do meu relógio”. Uma tal definição é de fato suficiente quando trata-se de definir um tempo exclusivamente para o lugar em que se encontra o relógio; a definição porém não é mais suficiente assim que se tratar de interligar temporalmente uma série de eventos que ocorrem em lugares diferentes, ou - equivalentemente - avaliar temporalmente eventos que ocorrem em lugares afastados do relógio.

Nós poderíamos, por outro lado, nos limitar a avaliar temporalmente os eventos por meio de um observador que se encontra na origem do sistema de coordenadas juntamente ao relógio, e que associa a correspondente posição dos ponteiros do relógio para cada sinal luminoso que representa um evento a ser avaliado e que chega até ele através o espaço vazio. Uma tal associação, porém, traz consigo o inconveniente de que ela não é independente do ponto de vista do observador dotado do relógio, como nós sabemos por experiência. Chegamos a uma determinação muito mais prática por meio da seguinte consideração.

No ponto A do espaço se encontra um relógio, e assim um observador que se encontra em A pode avaliar temporalmente eventos que acontecem na imediata

[1]A imprecisão que está por trás do conceito de simultaneidade de dois eventos que ocorrem (aproximadamente) no mesmo lugar, que igualmente deve ser superada por meio de uma abstração, não será discutida aqui.

proximidade de A procurando a posição dos ponteiros do relógio que é simultânea com esses eventos. Também no ponto B do espaço se encontra um relógio - queremos acrescentar "um relógio realizado exatamente da mesma forma como o relógio que se encontra em A" - então uma avaliação temporal dos eventos é possível também no imediato entorno de B por um observador que se encontra em B. Não é porém possível, sem uma ulterior imposição, comparar temporalmente um evento em A com um evento em B; até o momento temos definido somente um "tempo-A" e um "tempo-B", mas não um tempo conjunto para A e B. Este último tempo pode agora ser determinado estabelecendo *por definição* que o "tempo" que a luz precisa para chegar de A a B é igual ao "tempo" que ela precisa para chegar de B a A. Isto é, um raio de luz sai de A para B no "tempo-A" t_A, é refletido em B para A num "tempo-B" t_B e chega de volta em A no "tempo-A" t'_A. Os dois relógios estão sincronizados, por definição, se:[2]

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \; . \tag{1}$$

Supomos que esta definição de sincronismo seja possível de uma maneira livre de contradições, e certamente para muitos pontos arbitrários, e que então sejam válidas, em geral, as relações:

1. Se o relógio em B está sincronizado com o relógio em A, então o relógio em A está sincronizado com o relógio em B.

2. Se o relógio em A está sincronizado tanto com o relógio em B como também com o relógio em C, então os relógios em B e em C estão também sincronizados entre eles.

Nós temos então estabelecido, com o auxílio de uma certa experiência física (pensada), o que entende-se por relógios sincronizados que se encontram em repouso em lugares diferentes, e com isso, evidentemente, temos ganhado uma definição de "simultaneidade" e "tempo". O "tempo" de um evento é a indicação, simultânea ao evento, de um relógio que se encontra em repouso no lugar do evento e que está sincronizado com um determinado relógio em repouso, e com este claramente se mantém sincronizado para todas as determinações de tempo.

Com base na experiência podemos também estabelecer que a grandeza:

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V \tag{2}$$

é uma constante universal (a velocidade da luz no vácuo).

É essencial que tenhamos definido o tempo por meio de relógios em repouso num sistema em repouso; nós chamamos esse tempo que acabamos de definir "o tempo do sistema de repouso" por causa do fato que pertence ao sistema de repouso.

[2] [N.d.T.] No artigo original de Einstein as equações não são numeradas. Eu preferi numerá-las aqui para tornar mais práticas eventuais discussões em sala de aula.

§ 2. Sobre a relatividade dos comprimentos e dos tempos.

As seguintes considerações baseiam-se no princípio de relatividade e no princípio da constância da velocidade da luz, que definimos da seguinte maneira.

1. As leis segundo as quais os estados dos sistemas físicos mudam são independentes de qual de dois sistemas de coordenadas, que se encontram em movimento translacional uniforme um relativo ao outro, se usa para descrever essas mudanças.

2. Cada raio de luz movimenta-se num sistema de coordenadas "em repouso" com a velocidade definida V, independentemente se este raio de luz é emitido por um corpo em repouso ou em movimento. Com relação a isso tem-se

$$\text{Velocidade} = \frac{\text{Caminho percorrido pela luz}}{\text{Intervalo temporal}}, \tag{3}$$

onde "intervalo temporal" é para ser entendido no sentido da definição do § 1.

Seja dado um bastão rígido em repouso; o mesmo possui um comprimento l, medido com uma régua também em repouso. Imaginamos agora que o eixo do bastão fique no eixo X do sistema de coordenadas de repouso e após isso conferimos ao bastão um movimento de translação paralela uniforme (com velocidade v) ao longo do eixo X no sentido de x crescente. Investigamos agora sobre o comprimento do bastão *em movimento*, que imaginamos calculado através das duas seguintes operações:

a) O observador se movimenta, junto à régua acima mencionada, com o bastão a ser medido e mede o comprimento deste diretamente, encostando a régua, assim como se o bastão a ser medido, a régua e o observador estivessem em repouso.

b) O observador determina num determinado tempo t, por meio de relógios em repouso, posicionados no sistema de repouso e sincronizados conforme ao § 1, em quais pontos do sistema de repouso se encontram as extremidades do bastão a ser medido.

A distância entre as extremidades, medida com a régua já utilizada, mas desta vez em repouso, é também um comprimento que pode-se definir como "comprimento do bastão".

Segundo o princípio de relatividade o comprimento encontrado por meio do procedimento a), que chamamos de "comprimento do bastão no sistema em movimento", deve ser igual ao comprimento l do bastão em repouso.

Determinaremos, com base nos nossos dois princípios, o comprimento a ser encontrado por meio do procedimento b), que chamamos "o comprimento do bastão (em movimento) no sistema de repouso", e encontraremos que esse é diferente de l.

A cinemática usada habitualmente supõe tacitamente que os comprimentos determinados por meio dos dois procedimentos acima sejam exatamente iguais um com outro, ou, em outras palavras, que no instante de tempo t um corpo rígido em movimento seja geometricamente completamente substituível pelo *mesmo* corpo, quando ele *está em repouso* numa certa posição.

Além disso, imaginamos relógios fixados às duas extremidades do bastão (A e B), que sejam sincronizados com os relógios do sistema de repouso, isto é, cujos dados correspondem cada vez ao "tempo do sistema de repouso" nos lugares em que eles momentaneamente se encontram; esses relógios são então "sincronizados no sistema de repouso".

Imaginamos também que com cada relógio se encontre um observador em movimento com ele e que estes observadores usam em ambos os relógios o critério formulado no § 1 para o andamento sincronizado. No tempo[3] t_A sai um raio de luz de A, é refletido no tempo t_B em B, e chega de volta em A no tempo t'_A. Com base no princípio da constância da velocidade da luz encontramos:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \tag{4}$$

e

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v} \,, \tag{5}$$

onde r_{AB} representa o comprimento do bastão em repouso - medido no sistema de repouso. Observadores em movimento juntamente ao bastão em movimento encontrariam então que os dois relógios não são sincronizados, enquanto observadores que se encontram no sistema de repouso declarariam que os relógios são sincronizados.

Vemos então que não podemos atribuir ao conceito da simultaneidade nenhum significado *absoluto*, mas que dois eventos, que, examinados de um sistema de coordenadas, são simultâneos, examinados de um sistema em movimento relativo a este, não podem mais ser considerados como eventos simultâneos.

§ 3. Teoria da transformação das coordenadas e do tempo do sistema de repouso para um sistema que se encontra com relação a este em movimento translacional uniforme.

Sejam dados no espaço "em repouso" dois sistemas de coordenadas, ou seja, dois sistemas cada um com três linhas materiais, ortogonais entre si, que saem de um ponto. Os eixos X dos dois sistemas podem coincidir, e os seus eixos Y e Z podem ser respectivamente paralelos. Cada sistema seja providenciado com uma régua rígida e um certo número de relógios, e sejam as duas réguas, assim como todos os relógios dos dois sistemas, exatamente idênticos uns com os outros.

Seja conferida agora à origem de um dos dois sistemas (k) uma velocidade v (constante) na direção de x crescente do outro sistema em repouso (K), e que essa velocidade possa se comunicar também aos eixos coordenados, à relativa régua assim como aos relógios. A cada tempo t do sistema de repouso K corresponde então uma determinada posição dos eixos do sistema em movimento e, por razões de simetria, somos autorizados a supor que o movimento de k possa ser realizado de um jeito tal que os eixos do sistema em movimento sejam no tempo t (com "t" sempre é indicado um tempo do sistema de repouso) paralelos aos eixos do sistema em repouso.

Imaginamos agora de medir o espaço seja no sistema de repouso K, por meio da régua em repouso, seja também no sistema em movimento k, por meio da régua em movimento com ele, e então imaginamos determinadas as coordenadas

[3] "Tempo" significa aqui "tempo do sistema de repouso" e, também, "posição dos ponteiros do relógio em movimento, que se encontra no lugar em questão".

x, y, z e ξ, η, ζ, respectivamente. Além disso, o tempo t do sistema de repouso seja determinado para todos os pontos desse sistema por meio de relógios em repouso que se encontram nestes pontos, através sinais luminosos, na maneira explicada no § 1; da mesma forma seja determinado o tempo τ do sistema em movimento, para todos os seus pontos em que se encontram relógios em repouso com relação a ele, através o uso do método mencionado no § 1, trocando sinais de luz entre os pontos nos quais se encontram os mencionados relógios.

Para cada conjunto de valores x, y, z, t, que determina completamente posição e tempo de um evento no sistema de repouso, corresponde um conjunto de valores ξ, η, ζ, τ que determina aquele evento relativamente ao sistema k, e agora a tarefa a ser resolvida é de encontrar o sistema de equações que relaciona essas quantidades.

Primeiramente, é claro que as equações devem ser *lineares*, devido à propriedade de homogeneidade que atribuímos ao espaço e ao tempo.

Se colocamos $x' = x - vt$, é claro assim que a um ponto em repouso no sistema k pertence um sistema de valores x', y, z determinado e independente do tempo. Determinamos primeiramente τ como função de x', y, z e t. Para este propósito temos que expressar nas equações que τ não é outra coisa que a incarnação dos dados dos relógios em repouso no sistema k, que têm sido sincronizados de acordo com a regra dada no § 1.

Seja enviado da origem do sistema k um raio de luz no tempo τ_0 ao longo do eixo X para x' e de lá no tempo τ_1 refletido para a origem das coordenadas, onde chega no tempo τ_2; então tem que ser que:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \tag{6}$$

ou, incluindo os argumentos da função τ e usando o princípio da constância da velocidade da luz no sistema de repouso:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right] = \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right) . \tag{7}$$

Daqui segue, escolhendo x' indefinidamente pequeno:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial \tau}{\partial t} , \tag{8}$$

ou

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 . \tag{9}$$

Tem que ser ressaltado que em lugar da origem das coordenadas poderíamos ter escolhido qualquer outro ponto como ponto de saída do raio de luz e, por isso, a equação agora obtida vale para todos os valores de x', y, z.

Um raciocínio análogo - aplicado aos eixos H e Z - resulta, considerando que a luz observada do sistema de repouso propaga-se ao longo destes eixos sempre com a velocidade $\sqrt{V^2 - v^2}$, em:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0 . \tag{11}$$

Como τ é uma função *linear*, segue dessas equações que:

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right) \ , \tag{12}$$

onde a é uma função $\varphi(v)$ por enquanto desconhecida e, por brevidade, é assumido que na origem de k para $\tau = 0$ seja $t = 0$.

Com a ajuda deste resultado é fácil determinar as quantidades ξ, η, ζ, expressando em equações que a luz, medida no sistema em movimento, também propaga-se com velocidade V (como requer o princípio da constância da velocidade da luz em concomitância com o princípio de relatividade). Para um raio de luz emitido no tempo $\tau = 0$ na direção de ξ crescente vale:

$$\xi = V\tau \ , \tag{13}$$

ou

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right) \ . \tag{14}$$

Agora, o raio de luz se movimenta relativamente à origem de k com velocidade $V - v$, medida no sistema de repouso, assim que vale:

$$\frac{x'}{V - v} = t \ . \tag{15}$$

Inserimos este valor de t na equação para ξ e obtemos então:

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}x' \ . \tag{16}$$

Da mesma forma, encontramos através a análise de raios de luz que se movimentam ao longo de ambos os outros eixos:

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right) \ , \tag{17}$$

onde

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t \ ; \quad x' = 0 \ ; \tag{18}$$

então

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y \tag{19}$$

e

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z \ . \tag{20}$$

Substituímos para x' o seu valor, assim obtemos:

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \ , \tag{21}$$

$$\xi = \varphi(v)\beta(x - vt) \ , \tag{22}$$

$$\eta = \varphi(v)y \ , \tag{23}$$

$$\zeta = \varphi(v)z \ , \tag{24}$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \tag{25}$$

e φ é uma função de v por enquanto desconhecida. Não fazendo nenhuma hipótese sobre a posição inicial do sistema em movimento e sobre o ponto zero de τ, teria-se então que acrescentar a cada lado direito destas equações uma constante aditiva.

Temos agora que provar que cada raio de luz, medido no sistema em movimento, propaga-se com velocidade V, caso isso aconteça no sistema de repouso, como temos postulado; de fato, não temos ainda fornecido a prova que o princípio da constância da velocidade da luz é compatível com o princípio de relatividade.

No tempo $t = \tau = 0$ seja enviado da origem das coordenadas de ambos os sistemas, que neste tempo coincidem, uma onda esférica que propaga-se no sistema K com a velocidade V. Se (x, y, z) é um ponto que acaba de ser alcançado por esta onda, então tem-se

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2 \ . \tag{26}$$

Transformamos esta equação com a ajuda das nossas equações de transformação e obtemos, após um cálculo simples:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2 \ . \tag{27}$$

A onda considerada é então uma onda esférica com velocidade de propagação V também quando observada no sistema em movimento. Portanto, é mostrado que ambos os nossos princípios fundamentais são compatíveis um com outro.

Nas equações de transformação desenvolvidas aparece ainda uma função desconhecida φ de v que queremos agora determinar.

Introduzimos para este escopo ainda um terceiro sistema de coordenadas K' que seja concebido em movimento translacional paralelo ao eixo Ξ do sistema k de tal forma que a origem das coordenadas de K' se movimenta com velocidade $-v$ ao longo do eixo Ξ. No tempo $t = 0$ coincidam todas as três origens das coordenadas e seja para $t = x = y = z = 0$ o tempo t' do sistema K' igual a zero. Chamamos de x', y', z' as coordenadas medidas no sistema K' e obtemos, usando duas vezes as nossas equações de transformação:

$$t' = \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} \qquad = \varphi(v)\varphi(-v)t \ , \tag{28}$$

$$x' = \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} \qquad = \varphi(v)\varphi(-v)x \ , \tag{29}$$

$$y' = \varphi(-v)\eta \qquad = \varphi(v)\varphi(-v)y \ , \tag{30}$$

$$z' = \varphi(-v)\zeta \qquad = \varphi(v)\varphi(-v)z \ . \tag{31}$$

Como as relações entre x', y', z' e x, y, z não contêm o tempo t, os sistemas K e K' estão então em repouso relativo e é claro que a transformação de K para K' deva ser a transformação identidade. Tem-se então:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1 \ . \tag{32}$$

Agora investigamos o significado de $\varphi(v)$. Focamos na porção do eixo H do sistema k que fica entre $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ e $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Esta parte do eixo H é como um bastão em movimento relativo ao sistema K com velocidade v ortogonal ao próprio eixo, cujas extremidades possuem em K as coordenadas:

$$x_1 = vt \ , \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)} \ , \quad z_1 = 0 \tag{33}$$

e

$$x_2 = vt \ , \quad y_2 = 0 \ , \quad z_2 = 0 \ . \tag{34}$$

O comprimento do bastão medido em K é então $l/\varphi(v)$; esse é o significado da função φ. Por razões de simetria é agora plausível que o comprimento, medido no sistema de repouso, de um dado bastão, que está em movimento ortogonalmente ao próprio eixo, possa ser dependente somente da velocidade, mas não da direção e do sentido do movimento. Então, o comprimento do bastão em movimento, medido no sistema de repouso, não muda se v é trocado por $-v$. Daqui segue:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)} \ , \tag{35}$$

ou

$$\varphi(v) = \varphi(-v) \ . \tag{36}$$

Desta, e da relação encontrada há pouco, segue que deve ser $\varphi(v) = 1$, assim que as equações de transformação encontradas passam a ser:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \ , \tag{37}$$

$$\xi = \beta(x - vt) \ , \tag{38}$$

$$\eta = y \ , \tag{39}$$

$$\zeta = z \ , \tag{40}$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \ , \tag{41}$$

§ 4. Significado físico das equações obtidas, interessando corpos rígidos em movimento e relógios em movimento.

Examinamos uma esfera rígida[4] de raio R, que está em repouso relativamente ao sistema em movimento k, e cujo centro está na origem das coordenadas de k. A equação da superfície desta esfera, que se movimenta com velocidade v relativamente ao sistema K, é:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 \ . \tag{42}$$

A equação desta superfície, expressada em x, y, z no tempo $t = 0$ é:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2 \ . \tag{43}$$

[4]Isto é, um corpo que possui a forma de uma esfera, quando analisado em repouso.

Um corpo rígido que, medido em estado de repouso, tem a forma de uma esfera, tem então, em estado de movimento - analisado do sistema de repouso - a forma de um elipsoide de rotação com eixos:

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}, R, R \,. \tag{44}$$

Enquanto as dimensões Y e Z da esfera (e também de cada corpo rígido de forma arbitrária) aparecem então não mudadas pelo movimento, a dimensão X aparece encurtada na razão $1 : \sqrt{1-(\frac{v}{V})^2}$, e então mais fortemente encurtada à medida que v for maior. Para $v = V$ todos os objetos em movimento - analisados do sistema "de repouso" - encolhem em estruturas planas. Para velocidades superluminais os nossos raciocínios se tornam sem sentido; por outro lado, encontraremos nas seguintes considerações que a velocidade da luz desempenha na nossa teoria física o papel de velocidades infinitamente grandes.

É claro que os mesmos resultados valem para corpos em repouso no sistema de "repouso", quando são observados de um sistema em movimento uniforme. -

Pensamos, além disso, que um dos relógios, os quais são capazes de fornecer o tempo t estando em repouso relativo ao sistema de repouso, e o tempo τ estando em repouso relativo ao sistema em movimento, esteja na origem das coordenadas de k e configurado de um jeito tal que apresente o tempo τ. O quão rápido vai este relógio, quando observado do sistema em repouso?

Entre as grandezas x, t e τ, que se referem à posição deste relógio, valem evidentemente as equações:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \tag{45}$$

e

$$x = vt \,. \tag{46}$$

Então temos

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t \,, \tag{47}$$

de onde segue que a leitura do relógio (observado no sistema de repouso) por cada segundo fica atrás de $(1 - \sqrt{1-(\frac{v}{V})^2})$ segundos, ou de $\frac{1}{2}(v/V)^2$ segundos - negligenciando grandezas de quarta ordem e superiores.

Daqui resulta a seguinte consequência peculiar. Sejam dados nos pontos A e B de K relógios sincronizados em repouso, quando observados do sistema de repouso, e movimente-se o relógio A com velocidade v na direção de B ao longo da linha que une os dois, assim, depois da chegada desse relógio em B, os dois não estão mais sincronizados, mas o relógio que foi deslocado de A para B atrasa de $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ segundos (negligenciando quantidades de quarta ordem e superiores) com relação ao que desde o começo se encontra em B, onde t é o tempo que o relógio precisa para ir de A até B.

Se vê imediatamente que este resultado continua valendo também se o relógio se movimentar de A para B numa linha poligonal arbitrária e até se os pontos A e B coincidem.

Admitindo que o resultado mostrado para uma linha poligonal seja válido também para um linha curva contínua, obtém-se então a afirmação: se em A se encontram dois relógios sincronizados e se movimenta um dos dois com velocidade constante ao longo de uma curva fechada até que ele volte novamente em A, o que leva, digamos, t segundos, então atrasa este último relógio, na sua chegada em A com relação ao que ficou parado, de $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ segundos. Conclui-se que um relógio a roda de balanço que se encontra no equador terrestre deve correr um pouco mais lentamente de um relógio, exatamente idêntico e sujeito às mesmas condições, que se encontra num dos polos terrestres.

§ 5. Teorema de adição das velocidades.

No sistema k em movimento com velocidade v ao longo do eixo X do sistema K movimenta-se um ponto de acordo com as equações:

$$\xi = w_\xi \tau \tag{48}$$

$$\eta = w_\eta \tau \ , \tag{49}$$

$$\zeta = 0 \ , \tag{50}$$

onde w_ξ e w_η são constantes.

Procura-se o movimento do ponto relativamente ao sistema K. Introduzindo as quantidades x, y, z, t nas equações de movimento do ponto, e com ajuda das equações de transformação desenvolvidas no § 3, obtém-se:

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t \ , \tag{51}$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t \ , \tag{52}$$

$$z = 0 \ . \tag{53}$$

A lei do paralelogramo aplicada às velocidades vale então, conforme nossa teoria, somente em primeira aproximação. Colocamos:

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \ , \tag{54}$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2 \tag{55}$$

e

$$\alpha = \mathrm{arctg} \frac{w_y}{w_x} \ ; \tag{56}$$

α tem que ser enxergado então como o ângulo entre as velocidades v e w. Após uma simples conta resulta:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}} \ . \tag{57}$$

É notável que v e w entrem de maneira simétrica na expressão para a velocidade resultante. Se w tem também direção do eixo X (eixo Ξ) obtemos:

$$U = \frac{v+w}{1+\dfrac{vw}{V^2}} \ . \tag{58}$$

Dessa equação segue que da composição de duas velocidades, que são menores de V, resulta sempre uma velocidade menor que V. De fato colocando $v = V - \chi$, $w = V - \lambda$, onde χ e λ são positivos e menores que V, tem-se:

$$U = V \frac{2V - \chi - \lambda}{2V - \chi - \lambda + \dfrac{\chi\lambda}{V}} < V \ . \tag{59}$$

Além disso segue que a velocidade da luz V não pode ser mudada pela composição com uma “velocidade subluminal”. Para este caso obtém-se:

$$U = \frac{V+w}{1+\dfrac{w}{V}} = V \ . \tag{60}$$

Poderíamos ter obtido a fórmula para U, no caso em que v e w possuam a mesma direção, também através a combinação de duas transformações, de acordo com o § 3. Introduzimos junto aos sistemas K e k que aparecem no § 3 ainda um terceiro sistema k' em movimento paralelo com relação a k, cuja origem se movimenta ao longo do eixo Ξ com velocidade w. Assim obtemos equações entre as grandezas x, y, z, t e as correspondentes grandezas de k', que se distinguem das encontradas no § 3 somente pelo fato que em lugar de “v” entra a grandeza

$$\frac{v+w}{1+\dfrac{vw}{V^2}} \ ; \tag{61}$$

Disso se vê que tais transformações paralelas formam um grupo - como tem que ser.

Temos derivado as necessárias proposições da cinemática correspondente aos nossos dois princípios e passamos agora a mostrar o uso delas na eletrodinâmica.

II. Parte eletrodinâmica.

§ 6. Transformação das equações de Maxwell-Hertz para o espaço vazio. Sobre a natureza das forças eletromotrizes que surgem do movimento num campo magnético.

Sejam as equações de Maxwell-Hertz para o espaço vazio válidas para o sistema de repouso K, então seja:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \ , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \ , \tag{62}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \ , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \ , \tag{63}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \ , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \ , \tag{64}$$

onde (X, Y, Z) representa o vetor da força elétrica e (L, M, N) o da força magnética.

Usando nestas equações as transformações desenvolvidas no § 3, no sentido que relacionamos os processos eletromagnéticos ao sistema de coordenadas em movimento com velocidade v lá introduzido, obtemos então as equações:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta}, \tag{65}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi}, \tag{66}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}, \tag{67}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta}, \tag{68}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \tag{69}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi}, \tag{70}$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}. \tag{71}$$

O princípio de relatividade requer agora que as equações de Maxwell-Hertz para o espaço vazio sejam válidas também no sistema k, se elas são válidas no sistema K, isto é, que para os vetores da força elétrica e da força magnética $((X', Y', Z')$ e $(L', M', N'))$ do sistema em movimento k, definidos aqui pelos efeitos ponderomotores sobre massas elétricas e magnéticas,[5] sejam válidas as equações:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \tag{72}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \tag{73}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}, \tag{74}$$

Agora, evidentemente os dois sistemas de equações encontrados para o sistema k devem expressar exatamente a mesma física, pois ambos são equivalentes às equações de Maxwell-Hertz para o sistema K. Além disso, como as equações de ambos os sistemas coincidem, a parte os símbolos que representam os vetores, segue então que as funções que aparecem nos sistemas de equações nos lugares

[5][N.d.T.] Uma força ponderomotriz é uma força não-linear produzida por um campo eletromagnético não-homogêneo oscilante.

correspondentes devem coincidir a menos de um fator $\psi(v)$, comum para todas as funções de um dos dois sistemas de equações, independente de ξ, η, ζ e τ e eventualmente dependente de v. Valem então as relações:

$$X' = \psi(v)X \ , \qquad L' = \psi(v)L \ , \tag{75}$$

$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) \ , \qquad M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right) \ , \tag{76}$$

$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) \ , \qquad N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right) \ . \tag{77}$$

Construindo agora a inversão deste sistema de equações, primeiramente resolvendo as equações encontradas, secundariamente através a aplicação das equações na transformação inversa (de k para K), que é caracterizada pela velocidade $-v$, segue então, considerando que ambos os sistemas de equações obtidos devem ser idênticos:[6]

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1 \ . \quad [\psi(v) \cdot \psi(-v) = 1 \ .] \tag{78}$$

Além disso, segue por razões de simetria, que[7]

$$\varphi(v) = \varphi(-v) \ ; \quad [\psi(v) = \psi(-v) \ ;] \tag{79}$$

e então temos

$$\varphi(v) = 1 \ , \quad [\psi(v) = 1 \ ,] \tag{80}$$

e as nossas equações adquirem a forma:

$$X' = X \ , \qquad L' = L \ , \tag{81}$$

$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) \ , \qquad M' = \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right) \ , \tag{82}$$

$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) \ , \qquad N' = \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right) \ . \tag{83}$$

Para a interpretação destas equações consideramos o seguinte. Seja dada uma carga elétrica[8] puntiforme que, medida no sistema de repouso K, seja de grandeza "um", ou seja, estando em repouso no sistema de repouso exerce a forca de 1 dina numa carga elétrica idêntica numa distância de 1 cm. Segundo o princípio de relatividade esta carga elétrica é também de grandeza "um" quando medida pelo sistema em movimento. Estando essa carga elétrica em repouso relativamente ao sistema de repouso, o vetor (X, Y, Z) é então por definição igual à força agindo sobre ela. Se a carga elétrica está em repouso com relação ao sistema em movimento (pelo menos no instante considerado), assim a força agindo nela e medida no sistema em movimento é igual ao vetor (X', Y', Z'). As primeiras três das equações a cima podem ser expressadas em palavras das seguintes duas formas:

[6][N.d.T.] No texto original, na três equações que seguem, é usada a letra grega φ, mas este é um erro de digitação pois deveria ser usado ψ, como colocado entre colchetes.

[7]Sendo por exemplo $X = Y = Z = L = M = 0$ e $N \neq 0$, é claro então, por razões de simetria, que trocando o sinal de v sem mudança do valor numérico, Y' também tem que mudar o seu sinal sem mudar o seu valor numérico.

[8][N.d.T.] A palavra alemã utilizada aqui por Einstein é *Elektrizitätsmenge*, que literalmente se traduz como "quantidade de eletricidade". Eu preferi usar o termo "carga elétrica".

1. Estando um monopolo elétrico puntiforme em movimento num campo eletromagnético, age sobre ele, além da força elétrica, uma "força eletromotriz" que, negligenciando os termos multiplicados por potências de v/V de ordem dois e superiores, é igual ao produto vetorial da velocidade de movimento do monopolo e da força magnética, divido pela velocidade da luz. (Formulação antiga.)

2. Estando um monopolo elétrico puntiforme em movimento num campo eletromagnético, a força agindo sobre ele é então igual à força elétrica existente no lugar do monopolo elétrico, que se obtém através a transformação do campo para um sistema de coordenadas em repouso relativamente ao monopolo elétrico. (Formulação nova.)

Algo análogo vale para as "forças magnetomotrizes". Se vê que na teoria desenvolvida a força eletromotriz desempenha somente o papel de um conceito auxiliário, cuja introdução deve-se ao fato que as forcas elétrica e magnética não possuem uma existência independente do estado de movimento do sistema de coordenadas.

Além disso, é claro que a assimetria mencionada na introdução, sobre a observação de correntes geradas pelo movimento relativo de um ímã e de um condutor, desaparece. Também questões sobre o "sítio" das forças eletromotrizes eletromagnéticas (máquinas unipolares) se tornam sem fundamento.

§ 7. Teoria do princípio de Doppler e da aberração.

No sistema K se encontra, muito longe da origem das coordenadas, uma fonte de ondas eletromagnéticas que, na parte de espaço que contém a origem das coordenadas, é representada com suficiente aproximação pelas equações:

$$X = X_0 \sin\Phi\ , \qquad L = L_0 \sin\Phi\ , \tag{84}$$

$$Y = Y_0 \sin\Phi\ , \qquad M = M_0 \sin\Phi\ , \qquad \Phi = \omega\left(t - \frac{ax+by+cz}{V}\right)\ . \tag{85}$$

$$Z = Z_0 \sin\Phi\ , \qquad N = N_0 \sin\Phi\ , \tag{86}$$

Aqui (X_0, Y_0, Z_0) e (L_0, M_0, N_0) são os vetores que determinam as amplitudes dos frentes de onda, a, b, c são os cossenos diretores das normais das ondas.

Investigamos sobre a natureza destas ondas quando as mesmas são estudadas por um observador em repouso no sistema em movimento k. - Através o uso das equações de transformação para as forças elétrica e magnética, encontradas no § 6, e as equações de transformação para as coordenadas e o tempo, encontradas no § 3, obtemos imediatamente:

$$X' = X_0 \sin\Phi'\ , \qquad L' = L_0 \sin\Phi'\ , \tag{87}$$

$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V}N_0\right)\sin\Phi'\ , \qquad M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{V}Z_0\right)\sin\Phi'\ , \tag{88}$$

$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V}M_0\right)\sin\Phi'\ , \qquad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V}Y_0\right)\sin\Phi'\ , \tag{89}$$

$$\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right)\ , \tag{90}$$

onde define-se

$$\begin{aligned}
\omega' &= \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right) \ , && (91)\\
a' &= \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}} \ , && (92)\\
b' &= \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)} \ , && (93)\\
c' &= \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)} \ . && (94)
\end{aligned}$$

Da equação para ω' segue: estando um observador em movimento com velocidade v relativamente a uma fonte de luz infinitamente distante de frequência ν, de forma tal que a linha de ligação "fonte de luz-observador" forme o ângulo φ com a velocidade do observador referida ao sistema de coordenadas em repouso com respeito à fonte de luz, assim a frequência ν' da luz detectada pelo observador é dada pela equação:

$$\nu' = \nu\frac{1 - \cos\varphi\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \ . \tag{95}$$

Este é o princípio de Doppler para velocidades arbitrárias. Para $\varphi = 0$ a equação adquire a forma bem clara:

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}} \ . \tag{96}$$

Se vê que - contrariamente ao entendimento comum - para $v = -\infty$ tem-se $\nu = \infty$.

Chamando φ' o ângulo entre a normal de onda (a direção do raio) no sistema em movimento e a linha de ligação "fonte de luz-observador", a equação para a' adquire a forma:

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi} \ . \tag{97}$$

Esta equação expressa a lei de aberração na sua forma mais geral. Sendo $\varphi = \pi/2$, a equação adquire a forma simples:

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V} \ . \tag{98}$$

Temos agora ainda que procurar a amplitude da onda, como a mesma aparece no sistema em movimento. Chamando A e A' a amplitude da força elétrica ou magnética, medida no sistema de repouso e no em movimento, respectivamente, obtém-se:

$$A'^2 = A^2\frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \ , \tag{99}$$

a qual equação, para $\varphi = 0$, se torna a mais simples:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}} \,. \tag{100}$$

Segue das equações desenvolvidas que, para um observador que se aproxima com a velocidade V a uma fonte de luz, esta fonte de luz deve aparecer infinitamente intensa.

§ 8. Transformação da energia dos raios de luz. Teoria da pressão de radiação exercida em espelhos perfeitos.

Como a energia da luz por unidade de volume é igual a $A^2/8\pi$, então temos que considerar, pelo princípio de relatividade, $A'^2/8\pi$ como a energia da luz no sistema em movimento. Então seria A'^2/A^2 a razão da energia de um certo complexo de luz[9] "medida em movimento" com a "medida em repouso", se o volume de um complexo de luz medido em K e o volume medido em k fossem iguais. Isto, porém, não é o caso. Sendo a, b, c os cossenos diretores da normal de onda da luz no sistema de repouso, então nenhuma energia passa através os elementos de área da superfície esférica

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2 \tag{101}$$

que se movimenta com a velocidade da luz; podemos então dizer que esta superfície contém permanentemente o mesmo complexo de luz. Investigamos a quantidade de energia que esta superfície contém no sistema k, ou seja, sobre a energia do complexo de luz relativa ao sistema k.

A superfície esférica é - observada no sistema em movimento - uma superfície elipsoidal, descrita, ao tempo $\tau = 0$, pela equação:

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2 \,. \tag{102}$$

Chamando S o volume da esfera, e S' o do elipsoide, tem-se então, como um simples cálculo mostra:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi} \,. \tag{103}$$

Chamando então E a energia medida no sistema de repouso e E' a medida no sistema em movimento, que é contida pela esfera considerada, obtém-se:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \,, \tag{104}$$

[9] [N.d.T.] Em alemão *Lichtkomplex.* Pode ser entendido como um trem de ondas planas contido num dado volume.

a qual fórmula se escreve, para $\varphi = 0$, mais simplesmente:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{V}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{V}}} \, . \tag{105}$$

É notável que a energia e a frequência de um complexo de luz mudem com relação ao estado de movimento do observador de acordo com as mesmas leis.

Seja agora o plano de coordenadas $\xi = 0$ uma superfície perfeitamente refletora na qual as ondas planas consideradas no último parágrafo são refletidas. Analisamos a pressão da luz exercida sobre a superfície refletora e sobre a direção, frequência e intensidade da luz após a reflexão.

Seja a luz incidente definida pelas quantidades A, $\cos\varphi$, ν (referidas ao sistema K). As quantidades correspondentes consideradas em k são:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \, , \tag{106}$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi} \, , \tag{107}$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \, . \tag{108}$$

Para a luz refletida obtemos, se referimos o processo ao sistema k:

$$A'' = A' \, , \tag{109}$$

$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi' \, , \tag{110}$$

$$\nu'' = \nu' \, . \tag{111}$$

Enfim, obtém-se para a luz refletida, transformando de volta ao sistema de repouso K:

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \, , \tag{112}$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2} \, , \tag{113}$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2} \, . \tag{114}$$

A energia (medida no sistema de repouso) que incide por unidade tempo na superfície do espelho é evidentemente $A^2/8\pi(V\cos\varphi - v)$. A energia que se afasta da superfície do espelho na unidade de tempo é $A'''^2/8\pi(-V\cos\varphi''' + v)$. A diferença destas duas expressões é, segundo o princípio da energia, o trabalho executado por unidade de tempo pela pressão da luz. Igualando este trabalho ao produto $P \cdot v$, onde P é a pressão da luz, obtém-se:

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} . \tag{115}$$

Em primeira aproximação obtém-se, em conformidade com a experiência e com outras teorias

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi . \tag{116}$$

Todos os problemas da ótica dos corpos em movimento podem ser resolvidos de acordo com o método usado aqui. O essencial é que a força elétrica e a magnética da luz, que é afetada por um corpo em movimento, sejam transformadas para um sistema de coordenadas em repouso relativamente ao corpo. Por meio disso, cada problema da ótica dos corpos em movimento é reconduzido a uma sequência de problemas da ótica dos corpos em repouso.

§ 9. Transformação das equações de Maxwell-Hertz considerando as correntes de convecção.

Começamos das equações:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\varrho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} , \tag{117}$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\varrho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} , \tag{118}$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\varrho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} , \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} , \tag{119}$$

onde

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \tag{120}$$

representa a densidade, multiplicada por 4π, da eletricidade e (u_x, u_y, u_z) o vetor velocidade da eletricidade. Imaginando as massas elétricas ligadas invariavelmente a corpos rígidos e pequenos (íons, elétrons), estas equações são a base eletromagnética da eletrodinâmica de Lorentz e da ótica dos corpos em movimento.

Transformando estas equações, que são válidas no sistema K, para o sistema k, com a ajuda das equações de transformação do § 3 e do § 6, obtém-se as equações:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi \varrho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}\,, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}\,, \tag{121}$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta \varrho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}\,, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}\,, \tag{122}$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta \varrho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}\,, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}\,, \tag{123}$$

onde

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi\,, \tag{124}$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta\,, \qquad \varrho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)\varrho\,. \tag{125}$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta\,. \tag{126}$$

Sendo - como segue do teorema de adição das velocidade (§ 5) - o vetor (u_ξ, u_η, u_ζ) a velocidade das massas elétricas, medida no sistema k, mostra-se com isso que, com base nos nossos princípio cinemáticos, o fundamento eletrodinâmico da teoria de Lorentz da eletrodinâmica dos corpos em movimento corresponde ao princípio de relatividade.

Seja ainda rapidamente notado que das equações desenvolvidas pode ser facilmente deduzida a seguinte importante afirmação: se um corpo eletricamente carregado movimenta-se livremente no espaço e ao mesmo tempo a sua carga, observada de um sistema de coordenadas em movimento com o corpo, não varia, ela também permanece constante de acordo com o sistema K "de repouso".

§ 10. Dinâmica do elétron (lentamente acelerado).

Num campo eletromagnético movimenta-se uma partícula puntiforme, dotada de uma carga elétrica ε (daqui para frente chamada "elétron"), sobre cuja lei de movimento supomos somente o seguinte:

Estando o elétron em repouso numa dada época, então o seu movimento no seguinte intervalo de tempo ocorre segundo as equações:

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X \tag{127}$$

$$\mu\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y \tag{128}$$

$$\mu\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z\,, \tag{129}$$

$$\tag{130}$$

desde que o elétron se movimente lentamente. Aqui x, y, z representam as coordenadas do elétron, μ a massa do elétron.

Secundariamente, o elétron possui a velocidade v num dado instante de tempo. Procuramos a lei segundo a qual o elétron se movimenta no instante de tempo imediatamente seguinte.

Sem influenciar a generalidade do argumento, podemos e queremos supor que o elétron, no momento em que o observamos, se encontre na origem das coordenadas e que se movimente ao longo do eixo X do sistema K com velocidade v. É então óbvio que o elétron esteja em repouso no mencionado instante ($t = 0$) relativamente a um sistema de coordenadas k em movimento paralelo com velocidade constante v ao longo do eixo X.

Dos pressupostos feitos a cima é claro, em relação ao princípio de relatividade, que o elétron observado do sistema k se movimenta no tempo imediatamente seguinte (para pequenos valores de t) segundo as equações:

$$\mu\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varepsilon X' , \tag{131}$$

$$\mu\frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y' , \tag{132}$$

$$\mu\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z' , \tag{133}$$

$$\tag{134}$$

Onde os símbolos $\xi, \eta, \zeta, \tau, X', Y', Z'$ referem-se ao sistema k. Estabelecendo ainda que, para $t = x = y = z = 0$ deva ser $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, assim que as equações de transformação do §§ 3 e 6 sejam válidas, tem-se então:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) , \tag{135}$$

$$\xi = \beta(x - vt) , \qquad X' = X , \tag{136}$$

$$\eta = y , \qquad Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) , \tag{137}$$

$$\zeta = z , \qquad Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) . \tag{138}$$

Com a ajuda destas equações transformamos as equações do movimento a cima, do sistema k para o sistema K, e obtemos:

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\dfrac{1}{\beta^3}X , \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\dfrac{1}{\beta}\left(Y - \dfrac{v}{V}N\right) , \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\varepsilon}{\mu}\dfrac{1}{\beta}\left(Z + \dfrac{v}{V}M\right) . \end{cases} \tag{139}$$

Investigamos agora, segundo a abordagem usual, a massa "logitudinal" e a "transversal" do elétron em movimento. Escrevemos as equações (A) na forma

$$\mu\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X' , \qquad (140)$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y' , \qquad (141)$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z' \qquad (142)$$

$$(143)$$

e reparamos primeiramente que $\varepsilon X', \varepsilon Y', \varepsilon Z'$ são as componentes da força ponderomotriz que age sobre o elétron, e observada num sistema em movimento que, no instante considerado, possui justamente a mesma velocidade do elétron. (Esta força poderia ser medida nesse sistema, por exemplo, com uma balança a mola.) Se agora chamamos esta força simplesmente "a força agindo no elétron" e mantemos a equação

$$\text{Valor da massa } \times \text{ valor da aceleração } = \text{ valor da força} , \qquad (144)$$

e se, além disso, estabelecemos que as acelerações devem ser medidas no sistema de repouso K, obtemos das equações a cima:

$$\text{Massa longitudinal} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3} , \qquad (145)$$

$$\text{Massa transversal} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} . \qquad (146)$$

Naturalmente obteria-se outros valores para as massas usando outra definição da força e da aceleração; disto se aprende que deve-se proceder com muito cuidado na comparação de diferentes teorias do movimento do elétron.

Ressaltamos que estes resultados sobre as massas são válidos também para os pontos materiais ponderáveis; pois um ponto material ponderável pode ser tornado, através a introdução de uma carga elétrica arbitrariamente pequena, um elétron (no nosso sentido).

Determinamos a energia cinética do elétron. Movimentando-se um elétron da origem das coordenadas do sistema K ao longo do eixo X com a velocidade inicial 0 e constantemente sujeito ao efeito de uma força eletroestática X, é claro então que a energia subtraída ao campo eletroestático tem o valor $\int \varepsilon X dx$. Como o elétron deve ser lentamente acelerado, e por causa disso não pode emitir nenhuma energia sob forma de radiação, então a energia subtraída ao campo eletroestático deve ser igualada à energia de movimento W do elétron. Disto obtém-se, considerando que durante todo o processo de movimento observado vale a primeira das equações (A):

$$W = \int \varepsilon X dx = \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\} . \qquad (147)$$

W se torna então, para $v = V$, infinitamente grande. Velocidades superluminais não possuem - como nos nossos resultados anteriores - uma possibilidade de existência.

Também esta expressão para a energia cinética deve, segundo o argumento fornecido a cima, valer também para massas ponderáveis.

Queremos agora enumerar as propriedades do movimento do elétron que resultam do sistema de equações (A) e que são acessíveis ao experimento:

1. Da segunda equação do sistema (A) segue que uma força elétrica Y e uma força magnética N possuem então um efeito deflexionador igualmente forte para um elétron em movimento com a velocidade v, se $Y = N \cdot v/V$. Se deduz então que a determinação da velocidade do elétron é possível, conforme nossa teoria, a partir da razão entre as deviações magnética A_m e elétrica A_e, para velocidades arbitrárias, através o uso da lei:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}\,. \tag{148}$$

Esta relação pode ser provada experimentalmente, pois a velocidade do elétron pode ser medida diretamente, por exemplo por meio de campos elétricos e campos magnéticos rapidamente oscilantes.

2. Da derivação para a energia cinética do elétron segue que deve valer a seguinte relação entre a diferença de potencial atravessada e a velocidade v alcançada pelo elétron:

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}\,. \tag{149}$$

3. Calculamos o raio de curvatura da trajetória, R, no caso seja dada uma força magnética N (como única força defletora) agindo perpendicularmente à velocidade do elétron. Da segunda das equações (A) obtemos:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \tag{150}$$

ou

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}\,. \tag{151}$$

Estas três relações são uma expressão completa para as leis segundo as quais o elétron tem que se movimentar, de acordo com a teoria apresentada.

Para concluir, destaco que no trabalho dos problemas aqui tratados o meu amigo e colega M. Besso esteve fielmente ao meu lado e que estou em dívida com ele por várias importantes sugestões.

Berna, Junho 1905

(Recebido em 30 de junho de 1905)