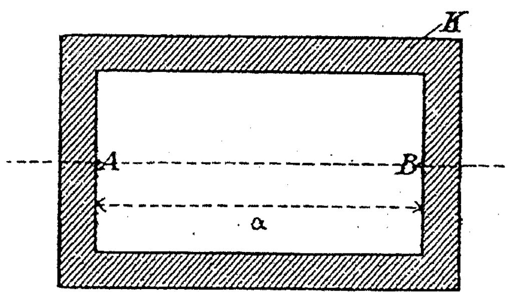
13. O princípio de conservação do movimento do centro de gravidade e a inércia da energia;*

di A. Einstein.

Em um trabalho publicado no ano passado[1]) mostrei que as equações eletromagnéticas maxwellianas levam, junto com o princípio da relatividade e o princípio da energia, à consequência de que a massa de um corpo muda como resultado de uma mudança em seu conteúdo de energia, qualquer que seja essa variação de energia. Acontece que, para uma variação de energia de magnitude ΔE deve corresponder uma variação de massa de magnitude $\Delta E/V^2$, onde V é a velocidade da luz.

Neste trabalho irei mostrar que essa proposição é a condição necessária e suficiente para que a lei da conservação do movimento do centro de gravidade seja válida (pelo menos em primeira aproximação) mesmo para sistemas em que não só ocorrem processos mecânicos, mas também eletromagnéticos. Embora as simples considerações formais que devem ser feitas para a demonstração desta afirmação já estejam contidas, em essência, em um artigo de H. Poincaré[2]), para maior clareza, não vou me basear nesse trabalho.

§ 1. Um caso especial.



Seja K um cilindro oco rígido, livre para se mover no espaço, mas em repouso. Em A haja um dispositivo que envie uma certa quantidade de energia radiante S, através da cavidade, para B. Durante a emissão dessa quantidade de energia, uma

*Título original: *Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie.* Publicado em: *Annalen der Physik* **20** (1906): 627–633. Traduzido por Oliver F. Piattella.

[1]A. Einstein, Ann. d. Phys. **18.** p. 639. 1905.

[2]H. Poincaré, Lorentz-Festschrift p. 252. 1900.

pressão de radiação atua na parede interna esquerda do cilindro oco K, que lhe confere uma certa velocidade para a esquerda. Como é facilmente demonstrado pelas leis da pressão de radiação, se o cilindro oco tem massa M, então esta velocidade é igual a $\frac{1}{V}\frac{S}{M}$, onde V é a velocidade da luz. K mantém essa velocidade enquanto o complexo radiativo, cuja extensão espacial seja considerada muito pequena em relação à da cavidade de K, é absorvido em B. A duração do movimento do cilindro oco é (negligenciando as contribuições de ordem superior) igual a α/V onde α é a separação entre A e B. Após a absorção do complexo radiativo em B, o corpo K está novamente em repouso. Durante o processo radiativo considerado, K mudou-se para a esquerda por uma distância:

$$\delta = \frac{1}{V}\frac{S}{M} \cdot \frac{\alpha}{V} \,. \tag{1}$$

No espaço oco de K seja dado um corpo k, que é imaginado sem massa, por simplicidade, e também seja dado um mecanismo (inclusive sem massa) que mova k, inicialmente encontrado em B, para frente e para trás entre B e A. Depois que a quantidade de radiação S é recebida em B, essa energia é transferida para k e a partir daí k move-se para A. Eventualmente, a quantidade de energia S é recebida novamente pelo cilindro oco K em A e k volta para B novamente. Todo o sistema agora passou por um processo cíclico completo que você pode imaginar se repetindo quantas vezes quiser.

Se for assumido que o corpo móvel k não tenha massa mesmo quando ele adquiriu a quantidade de energia S, então deve-se também supor que o retorno da energia S não esteja relacionado a uma mudança no estado de movimento do cilindro oco. O resultado de todo o processo cíclico descrito, portanto, consiste apenas em um deslocamento δ de todo o sistema para a esquerda, e esse deslocamento pode ser feito tão grande quanto desejado, repetindo o próprio processo cíclico. Obtemos assim o resultado de que um sistema originalmente em repouso, sem forças externas agindo sobre ele, pode mudar a posição de seu centro de gravidade à vontade e sem que o sistema sofra uma mudança permanente.

É claro que o resultado obtido não contém contradições internas; no entanto, ele se choca com as leis fundamentais da mecânica, segundo as quais um corpo inicialmente em repouso, sobre o qual nada atua, não pode realizar nenhum movimento de translação.[1]

Supondo, entretanto, que a inércia E/V^2 pertença a essa energia E, então a contradição com os preceitos da Mecânica desaparece. Segundo esta hipótese, o corpo móvel k possui, portanto, massa S/V^2 enquanto transporta a quantidade de energia S de B para A; e como o centro de gravidade *de todo o sistema* durante este processo deve estar em repouso, de acordo com a lei do centro de gravidade, então o cilindro oco K experimenta durante o mesmo processo um deslocamento

[1] **NdT.** Explicado em outras palavras, quando uma onda eletromagnética, ou um pacote de ondas eletromagnéticas (chamado de ”complexo radiativo” por Einstein) é emitido a partir de A, o recuo coloca o cilindro oco em movimento para a esquerda, pois ondas eletromagnéticas possuem momento linear. Quando estas são absorvidas em B, um novo recuo pára o cilindro. Estamos aplicando a conservação do momento linear. Agora, o corpo móvel k, tendo massa zero, é capaz de trazer a energia de volta para A, mas não o momento linear. Para isso, um movimento perpétuo pode ser estabelecido.

total S' à direita em tamanho

$$\delta' = \alpha \cdot \frac{S}{V^2} \cdot \frac{1}{M} \,. \tag{2}$$

Uma comparação com o resultado acima mostra que (pelo menos como uma primeira aproximação) $\delta = \delta'$, ou seja, portanto, que a posição do sistema antes e depois do processo cíclico é a mesma. Assim, a contradição com os preceitos da mecânica é eliminada.[2]

§ 2. Sobre a lei de conservação do movimento do centro de gravidade.

Consideremos um sistema de n pontos materiais discretos com massas m_1, m_2, $\ldots m_n$ e coordenadas do centro de gravidade $x_1, \ldots z_n$. Esses pontos sejam entendidos não como estruturas elementares no sentido termodinâmico e elétrico (átomos e moléculas), mas como corpos no sentido comum da palavra, de pequenas dimensões, cuja energia não é conhecida pela velocidade do centro de gravidade. Essas massas sejam capazes de interagir umas com as outras tanto por meio de processos eletromagnéticos, quanto por meio de forças conservativas (por exemplo, gravidade, vínculos rígidos); no entanto, queremos levantar a hipótese de que tanto a energia potencial das forças conservativas quanto a energia cinética do movimento do centro de gravidade das massas devem ser sempre consideradas infinitamente pequenas em comparação com a energia "interna" das massas $m_1, \ldots m_n$.

[2] **NdT.** Por outro lado, se uma massa S/V^2 está associada ao corpo móvel k quando carrega a energia S, então tem momento linear e portanto quando parte de B para retornar a A o cilindro oco recua para a direita. Nestes processos de recuo, o momento linear é conservado, o que é equivalente a dizer que o movimento do centro de gravidade é conservado.

Sejam as equações Maxwelliana-Lorentzianas válidas em todo o espaço:[3]

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{u}{V}\varrho \quad + \quad \frac{1}{V}\frac{dX}{dt} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \, , \\
\frac{v}{V}\varrho \quad + \quad \frac{1}{V}\frac{dY}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \, , \\
\frac{w}{V}\varrho \quad + \quad \frac{1}{V}\frac{dZ}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \, , \\
\frac{1}{V}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \, , \\
\frac{1}{V}\frac{dM}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \, , \\
\frac{1}{V}\frac{dN}{dt} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \, ,
\end{aligned}
\right.
\tag{3}
$$

onde[4]

$$
\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \tag{4}
$$

representa a densidade da eletricidade multiplicada por 4π.

Adicionando as equações acima, cada uma multiplicada respectivamente por

$$
\frac{V}{4\pi}Xx \, , \quad \frac{V}{4\pi}Yx \ldots \frac{V}{4\pi}Nx \tag{5}
$$

e integrando as mesmas sobre todo o espaço, após algumas integrações por partes, obtém-se assim a equação[5]

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\varrho}{4\pi} x(uX + vY + wZ)d\tau + \frac{d}{dt}\left\{ \int x \cdot \frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 \cdots + N^2)d\tau \right\} \\
- \frac{V}{8\pi} \int (YN - ZM)d\tau = 0 \, .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

O primeiro membro desta equação representa a energia fornecida pelo campo eletromagnético aos corpos $m_1 \ldots m_n$. De acordo com nossa hipótese da dependência

[3]**NdT.** Nessas equações X, Y, Z são os componentes cartesianos do campo elétrico $\mathbf{E}$, enquanto L, M, N os do campo magnético $\mathbf{B}$, e unidades gaussianas são utilizadas. As três primeiras equações representam $\frac{1}{V}\mathbf{J} + \frac{1}{V}\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathrm{rot}\ \mathbf{B}$ e as segundas três $\frac{1}{V}\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\mathrm{rot}\ \mathbf{E}$. A densidade de corrente deve ser definida como $\mathbf{J} = \mathbf{u}\varrho$ e portanto (u, v, w) são os componentes de velocidade da densidade de carga. No trabalho original de Einstein, provavelmente há um erro de digitação, pois só aparece u nas três primeiras equações .

[4]**NdT.** Isto é $\varrho = \mathrm{div}\ \mathbf{E}$.

[5]**NdT.** Esta equação representa a conservação de energia e hoje é mais frequentemente encontrada escrita, na forma diferencial, no teorema de Poynting $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{dU}{dt} + \mathrm{div}\ \mathbf{S} = 0$, onde $U = \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}B^2$ é a densidade de energia do campo eletromagnético e $\mathbf{S} = V\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ é o vetor de Poynting. Einstein multiplica esta equação por x e, em seguida, integra por todo o espaço. Desta forma, a última contribuição isola o componente x do vetor de Poynting.

das massas da energia, devemos, portanto, igualar o primeiro adendo da soma à expressão

$$V^2 \sum x_\nu \frac{dm_\nu}{dt} \; , \tag{7}$$

uma vez que, como sugerido acima, os pontos materiais individuais m_ν variam sua energia e, portanto, sua massa, *apenas* através da absorção de energia eletromagnética.

Se também atribuirmos uma densidade de massa (ϱ_e) ao campo eletromagnético, que difere da densidade de energia por um fator de V^2, então o segundo membro da equação assume a forma:

$$V^2 \frac{d}{dt} \left\{ \int x \varrho_e d\tau \right\} \; . \tag{8}$$

Denotando por J a integral aparecendo no terceiro membro da equação, esta última torna-se:

$$\sum \left(x_\nu \frac{dm_\nu}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left\{ \int x \varrho_e d\tau \right\} - \frac{1}{4\pi V} J = 0 \; . \tag{9}$$

Devemos agora investigar o significado da integral J. Multiplicando a segunda, terceira, quinta e sexta das equações respectivamente pelos fatores NV, $-MV$, $-ZV$, YV, somando-as e integrando-as no espaço, obtemos, após alguma integração por partes,

$$\frac{dJ}{dt} = -4\pi V \int \frac{\varrho}{4\pi} \left(X + \frac{v}{V} N - \frac{w}{V} M \right) d\tau = -4 V R_x \; , \tag{10}$$

onde R_x é a soma algébrica dos componentes x de todas as forças exercidas pelo campo eletromagnético nas massas $m_1, \ldots m_n$. Como a soma correspondente de todas as forças derivadas de interações mútuas conservativas dá zero, ao mesmo tempo R_x é a soma dos componentes x de *todas* as forças exercidas sobre as massas m_ν.[6]

Agora queremos lidar primeiro com a equação (10), que é independente da hipótese de que as massas dependem da energia. Primeiro, desprezamos a dependência das massas da energia e denotamos por $\mathfrak{X}_\nu$ a resultante de todos os componentes x das forças agindo em m_ν, então devemos definir para a massa m_ν a equação do movimento:

$$m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left\{ m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \right\} = \mathfrak{X}_\nu \; , \tag{11}$$

então também obtemos:

$$\frac{d}{dt} \sum \left(m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} \right) = \sum \mathfrak{X}_\nu = R_x \; . \tag{12}$$

[6]**NdT.** O vetor de Poynting representa a densidade de energia de momento do campo eletromagnético e, portanto, sua integral sobre todo o espaço, derivada em relação ao tempo, representa a força que atua sobre o sistema de cargas.

Da equação (12) e da equação (10) obtemos

$$\frac{J}{4\pi V} + \sum m_\nu \frac{dx_\nu}{dt} = \text{constante.} \tag{13}$$

Se agora reintroduzirmos a hipótese de que as quantidades m_ν dependem da energia e, portanto, também do tempo, surge a dificuldade de que, neste caso, as equações mecânicas não são mais conhecidas; o primeiro sinal de igualdade da equação (11) não é mais válido. No entanto, deve-se notar que a diferença

$$\frac{d}{dt}\left\{m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right\} - m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = \frac{dm_\nu}{dt}\frac{dx_\nu}{dt} = \frac{1}{V^2}\int \frac{\varrho}{4\pi}\frac{dx_\nu}{dt}(uX + vY + wZ)d\tau \tag{14}$$

é de segundo grau na velocidade. Se todas as velocidades são tão pequenas de forma que os membros de segundo grau podem ser desprezados, então, mesmo quando a massa m_ν é variável, a equação se mantém

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \frac{dx_\nu}{dt}\right) = \mathfrak{X}_\nu \tag{15}$$

pelo menos no nível de aproximação considerado. Portanto, as equações (12) e (13) são também válidas, e obtém-se a partir das equações (12) e (9):

$$\frac{d}{dt}\left[\sum(m_\nu x_\nu) + \int x\varrho_e d\tau\right] = \text{constante.} \tag{16}$$

Denotando por ξ a coordenada X do centro de gravidade das massas ponderáveis e da energia de massa do campo eletromagnético, temos portanto

$$\xi = \frac{\sum(m_\nu x_\nu) + \int x\varrho_e d\tau}{\sum m_\nu + \int \varrho_e d\tau}\,, \tag{17}$$

onde, de acordo com o princípio da energia, o valor do denominador do lado direito é independente do tempo.[1]) Podemos, portanto, escrever a equação (16) também na forma:

$$\frac{d\xi}{dt} = \text{cost.} \tag{18}$$

Portanto, ao atribuir a essa energia E a massa inercial E/V^2, o princípio de conservação do movimento do centro de gravidade é válido — pelo menos em primeira aproximação —, mesmo para sistemas em que ocorrem processos eletromagnéticos.

Da investigação acima, segue-se que ou se deve renunciar à lei fundamental da mecânica, segundo a qual um corpo originalmente em repouso, não sujeito a forças externas, não pode realizar nenhum movimento de translação, ou se deve assumir que a inércia de um corpo depende do conteúdo energético deste, de acordo com a lei dada.

Berna, maio de 1906.

(Recebido em 17 de maio de 1906.)

[1]De acordo com a interpretação desenvolvida neste trabalho, a lei da constância da massa é um caso especial do princípio da energia.